Измерителни единици. Измерване на физични величини и методи за обработка на експерименталните резултати

(УПЪТВАНЕ ЗА РАБОТА В ЛАБОРАТОРНИЯ ПРАКТИКУМ ПО ФИЗИКА)

СЪДЪРЖАНИЕ

1. Измерителни единици

1.1 Физичен смисъл на измерителните единици

Както е известно подходът, чрез който физиката описва реалността е свързан с три основни стъпки:

(а) Дефиниране на съвкупност от ***физични величини***, които описват свойствата и състоянията на изследваните обекти.

(б) Експериментално или теоретично установяване на съществуващи ***връзки*** между едни или други физични величини, които се наричат ***физични закони***. Обикновено физичните закони се изразяват чрез математични формули, в които участват свързаните величини.

(в) Експериментална проверка на физичните закони чрез ***измерване на физичните величини*** и сравняване на предсказанията на теорията с резултатите от експеримента. Измерването и сравнението са основен метод за проверка на верността на физичните теории и, ако теориите противоречат на експерименталните факти те биват отхвърляни като неверни.

Тъй като физиката се занимава с най-фундаменталните закони, описващи света, то всички останали науки, изследващи или използващи обекти и явления от реалността, включително и инженерните, използват не само знанието натрупано от физиката, но и описаният по-горе методологичен подход. Поради това те се разглеждат като експериментални (точни) науки, тъй като експериментът функционира и като метод за изследване и получаване на нова информация и като метод за проверка на верността на направените изводи и заключения. Всеки експеримент е свързан с измерване и сравняване на физични величини и поради това измерването на физични величини е дейност дълбоко присъща и изключително важна за всички точни науки (естествени и инженерни).

Измерването е процедура, която има за цел да съпостави на измерваната величина (например, масата на дадено тяло) определена числена стойност, като, поне по принцип, тази процедура трябва да е приложима за измерване на всички величини от същия тип (т.е. на масите на всякакви тела и обекти). При това получените чрез измерване стойности трябва да могат да се сравняват. Единственият начин да се удовлетвори това изискване е всички величини от един и същ тип да бъдат сравнявани с една фиксирана величина от същия тип, която се приема за стандарт (еталон) и нейната стойност се приема за единица.

Пример 1: Нека имаме само 3 различни тела и нека чрез някаква процедура се опитаме да измерим техните маси $\boldsymbol{m_1}$, $\boldsymbol{m_2}$ и $\boldsymbol{m_3}$ т.е. да съпоставим на тези маси конкретни числени стойности. Ако, например чрез везна, сравним масата на първото тяло с масите на второто и третото и получим $\boldsymbol{m_1} = 2\ \boldsymbol{m_2}$ и $\boldsymbol{m_1} = 4\ \boldsymbol{m_3}$, то резултатът е неудовлетворителен, защото за една и съща маса (първата) имаме две различни числени стойности, а за останалите маси въобще не можем да посочим числена стойност. Очевидно, по-добре е да сравняваме масите с масата на само едно от телата (например първото), получавайки $\boldsymbol{m_2} = 0{,}5\ \boldsymbol{m_1}$ и $\boldsymbol{m_3} = 0{,}25\ \boldsymbol{m_1}$.Остава, обаче, проблемът с числената стойност на първата маса. И тъй като по условие не разполагаме с други тела, единствената възможност е да присвоим на $\boldsymbol{m_1}$ някаква фиксирана стойност, като най-просто е тя да бъде единица. Така, ако предположим, че масата на първото тяло е 1 за измерваните маси ще имаме $\boldsymbol{m_1} = 1$, $\boldsymbol{m_2} = 0{,}5$ и $\boldsymbol{m_3} = 0{,}25$.

Разгледаният пример лесно може да бъде обобщен за произволен брой тела и очевидно стигаме до извода, че за да има определеност и сравнимост на числените стойности с които характеризираме масите на телата, то тези стойности трябва да бъдат получени чрез сравнение на масите на различните тела с масата на едно и също фиксирано тяло, което обикновено се нарича стандарт (еталон) и чиято маса се приема за единица. По принцип ние можем да изберем за стандарт (еталон) кое да е тяло и да приемем неговата маса за единица. За да има, обаче, сравнимост на резултатите от измерванията на различни хора, на различни места и в различни моменти е задължително те да бъдат извършвани спрямо точно един и същ стандарт (еталон). За да се даде информация спрямо кой стандарт (еталон) е работено при дадено измерване, на използваните в практиката стандарти се дават съответни имена (обозначения). Например, прието е масата на цилиндър с височина и с диаметър равни на 39.17 mm, изработен от сплав на 90 % платина и 10 % иридий, да се нарича килограм и да има стойност единица. Поради това, да измерим масата на едно или друго тяло в килограми означава да сравним тези маси с масата на точно това еталонно тяло. Ако към 3-те тела, с които стартирахме в началото на примера, добавим и стандарта (еталона) за килограм с маса $\boldsymbol{m_0}$ и ако чрез измерване получим, например, $\boldsymbol{m_1} = 8\ \boldsymbol{m_0}$, то измерените стойности на масите се записват като $\boldsymbol{m_1} = 8\ kg$, $\boldsymbol{m_2} = 4\ kg$ и $\boldsymbol{m_3} = 2\ kg$. Този запис на резултатите показва, че като стандарт (еталон) при конкретното измерване е използван стандарта за килограм.

От казаното следва, че, ако имаме произволна величина А, то резултатът от измерването й винаги трябва да се представя във вида

$$A = \overline{A}.A_0$$

където A_0 е името (обозначението) на стандартната (еталонна) величина, с която сравняваме, а $\overline{A}$ е т.нар. ***числена стойност на величината***, която показва колко пъти стойността на измерваната величина е по-голяма от стойността на стандартната (еталонна) величина. Като правило, числените стойности на всички стандартни (еталонни) величини се приемат за единица (това е най-просто) и поради това те се наричат ***измерителни единици***. Например записът $A = 5\ s$ означава, че измерителната единица е една секунда (s), а измерваната величина има стойност (продължителност) 5 пъти по-голяма от 1 s. И тъй като в практиката на нас ни се налага да измерваме различни по тип физични величини (например, маса, дължина, време, сила, скорост и т.н.), то, очевидно, ние ще трябва да използваме различни измерителни единици, съответстващи като тип на величините, които искаме да измерваме чрез описаната по-горе процедура на сравнение.

Извод: Ролята на измервателната единица ***е да даде информация за това каква е стандартната (еталонна) величина***, с която сме сравнявали при определянето на числената стойност на измерваната величина.

Пример 2: От казаното дотук следва, че, ако задавайки стойността на някаква величина, напишем, например,

$$A = 5$$

то ние указваме, че стойността на ***A*** е 5 пъти по-голяма, но не казваме от какво. От метър, килограм, секунда, кифла ? Или, ако от контекста е ясно, че ***A*** е дължина, то от каква дължина е 5 пъти по-голяма. От метър, милиметър, километър, ярд ? Ясно е, че ***запис, при който е посочена само числената стойност, но не и измерителната единица, не носи никава информация и поради това е абсолютно безмислен.***

Правило: *Когато се записва стойността на дадена физична величина, абсолютно задължително е освен числената стойност да бъде указана и измерителната единица спрямо която е получена тази стойност*.

Изключение: Във физиката и инженерните науки се използват известен брой величини, които се дефинират като ***отношение на две величини с една и съща размерност***. Поради това те се характеризират само с числена стойност и се наричат ***безразмерни***. Единствено те се задават само чрез числената си стойност.

1.2 Международна система измерителни единици (SI)

От горните разглеждания е ясно, че при измерването на една и съща величина е възможно да бъдат избирани различни стандарти (еталони) за сравнение т.е. различни измерителни единици. Поради това, с развитието на науките, в човешката практика постепенно са се появили различни измерителни единици за едни и същи величини. Например, за една от най-важните величини – дължина, едновременно са се използвали множество различни стандарти и свързаните с тях измерителни единици. Нека разгледаме три от тях - метър, фут и инч. Ако измерим чрез тях, например, ширината на лист хартия А4 получаваме

$$L = 0{,}210\ m = 0{,}689\ ft = 8{,}268\ in$$

Както и трябва да се очаква, числената стойност на една и съща дължина е различна ако е измерена в различни единици, тъй като те предполагат сравнение с различни еталонни тела. Ясно е, че и трите измервания са коректни, но, очевидно, използването на различни измерителни единици ще създава големи неудобства на хората, работещи по едни и същи проблеми, тъй като ще затруднява директното сравняване на резултатите им. За да се реши този проблем, на $\mathrm{XI}^{\text{-та}}$ Генерална Конференция по Мерки и Теглилки през 1960 г. е постигнато съгласие за използване на точно определена съвкупност от измерителни единици при измерването на физичните величини. Тази съвкупност от измерителни единици се нарича SI (**S**ystème **I**nternational) и е задължителна за всички области от човешката дейност (наука, техника, образование и т.н.).

На пръв поглед, научаването на всички измерителни единици изглежда невъзможна задача, тъй като броят на физичните величини използвани в практиката е огромен. Всъщност нещата са много по-прости, защото, независимо от тяхното многообразие, използваните от нас физични величини могат да се разделят на две групи – ***основни и производни***. Една малка група от физичните величини не могат да се изразяват една чрез друга и единствения начин да бъдат определени е чрез измерване. Поради това те се наричат основни. Всички останали величини, обаче, могат да се изразят като някаква комбинация или функционална зависимост чрез основните. Поради това те се наричат производни.

Пример 3: Една от най-често използваните и най-важни величини е величината скорост. За най-простия случай на постоянна скорост, дефиницията ѝ е

$$V = \frac{S}{t}$$

където S е изминатият път за време t. От формулата се вижда, че скоростта се изразява като отношение на път и време. Поради това пътят и времето са основни физични величини, а скоростта – производна.

Тези съотношения между величините се пренасят и върху измерителните им единици. Измерителните единици на основните физични величини също се наричат основни и всички останали измерителни единици могат да се изразят чрез тях, поради което се наричат производни. Така, за да можем успешно да оперираме с измерителните единици са необходими две неща:

(а) Задължително да знаем основните измерителни единици (които са малък брой!).

(б) Да знаем правилата за изразяване на производните единици чрез основните.

Основните физични величини и техните измерителни единици в система SI са:

Величина	***Измерителна единица (Обозначение)***
Дължина	метър (m)
Маса	килограм (kg)
Време	секунда (s)
Големина на електричен ток	Ампер (A)
Термодинамична температура	Келвин (K)
Количество вещество	мол (mol)
Интензитет на светлината	кандела (cd)

Към тях обикновено се добавят и единиците за равнинен и пространствен ъгъл – радиан и стерадиан. Те се наричат ***допълнителни*** единици.

Правилата за изразяване на производните измерителни единици чрез основните произтичат от факта, че съотношенията между измерителните единици съвпадат със съотношенията между съответните величини. Поради това, за да изразим дадена производна единица чрез основните, на нас ни е достатъчна каквато и да е формула (дефиниция, закон и т.н.), която да изразява съответната физична величина чрез основните. С други думи, ако с $[A]$ обозначаваме измерителната единица на физичната величина A и, ако е в сила формулата

$$A = f(B, C, D)$$

където *f( )* е някаква функционална зависимост, а B,C и D са основни физични величини, то в сила е равенството

$$[A] = f([B], [C], [D])$$

откъдето изразяваме [A] чрез $[B]$, $[C]$ и $[D]$ т.е. чрез единиците за B,C и D .

Пример 4:

(а) В предишния пример (Пример 3) бе посочена дефиниционна формула, изразяваща скоростта чрез пътя и времето. Прилагайки горното правило, получаваме

$$[V] = \frac{[S]}{[t]} = \frac{m}{s}$$

тъй като измерителните единици за път и време са, съответно, метър и секунда.

(б) По дефиниция налягането е равно на силата, която действа на единица площ т.е. в сила е равенството

$$P = \frac{F}{S}$$

където F е силата, действаща върху площта S. Прилагайки горното правило, получаваме

$$[P] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{N}{m^2}$$

Това представяне на единицата за налягане е вярно и може да се използва, но, тъй като силата не е основна величина, можем да се опитаме да изразим единицата за налягане само чрез основни единици. За тази цел трябва да изразим единицата за сила Нютон (*N*) чрез основните единици и да заместим в горното равенство. Единицата за сила можем да изразим от втория закон на динамиката

$$F = ma$$

откъдето получаваме

$$[F] = [m].[a] = kg.\frac{m}{s^2} \quad \Rightarrow \quad N = kg.\frac{m}{s^2}$$

Следователно,

$$[P] = \frac{1}{m^2}.\,kg.\,\frac{m}{s^2} = \frac{kg}{m.\,s^2}$$

Това представяне на единицата за налягане също е вярно, но е малко сложно. И, тъй като налягането е много важна величина и непрекъснато се използва, за него се въвежда специална измерителна единица, която в система SI се нарича Паскал (Pa). Така, в крайна сметка, за единицата за налягане получаваме

$$[P] = Pa = \frac{N}{m^2} = \frac{kg}{m.\,s^2}$$

И трите представяния на единицата са верни, но, разбира се, първото е най-просто.

(в) Динамичният вискозитет $\boldsymbol{\eta}$ на газ, протичащ през тръба с радиус $\boldsymbol{r}$ и дължина $\boldsymbol{l}$, се определя от формулата на Поазьой

$$\eta = \frac{\pi\, r^4 \Delta P\, t}{8V\, l}$$

където ΔP е разликата в наляганията в краищата на тръбата, а *V* е обемът газ протекъл за време $\boldsymbol{t}$. Прилагайки правилото, получаваме

$$[\eta] = \frac{[r]^4[\Delta P][t]}{[V][l]} = \frac{m^4.\,Pa.\,s}{m^3.\,m} = Pa.\,s$$

Това, което трябва да се отбележи в този пример е, че числата (в случая това са $\boldsymbol{\pi}$ и **8**) не дават принос в размерността. Причината е, че те са числови, а не физични величини, и са безразмерни.

Ситуацията, разгледана във втория от горните примери, където за налягането бе въведена специална единица, не е изключение. За много от особено важните физични величини, чиито единици се изразяват по по-сложен начин чрез основните единици, са въведени специални наименования (обозначения) за единиците им. Такива са, например, енергията – Джаул (J), мощността – Ват (W), напрежението – Волт (V) и т.н. Тези единици са производни и могат да се изразят чрез основните. Използването им, обаче, като отделни единици е абсолютно правомерно и много удобно.

1.3 Извънсистемни измерителни единици

Основните и производни измерителни единици, регламентирани в системата SI, се наричат ***системни единици***. Освен тях, обаче, в практиката се използват и множество други единици, които, естествено, се наричат ***извънсистемни***. Основните причини за използването на такива единици са удобството и традицията. Например, в науката и техниката, най-често срещаните извънсистемни единици са тези, които се образуват чрез ***представки*** на системните единици и които се използват преди всичко за удобство. Тяхното използване се обуславя от факта, че диапазона от числени стойности, с които оперираме в практиката, е наистина огромен. Ако, например, разгледаме величината маса, то диапазона от числени стойности на маси, с които се сблъскваме в практиката, варира от масата на електрона $\boldsymbol{m_e} \approx 10^{-30}$ kg до масата на нашата галактика (Млечния път) $\boldsymbol{m_G} \approx 10^{42}$ kg. Подобно е положението и с болшинството други величини и поради това в практиката ни се налага да работим не само с числа близки до единицата, но и много по-малки или много по-големи от единица. За такива много малки и много големи числа ежедневният „десетичен” формат на записване на числата е изключително неудобен (Представете си какво е да запишете масата на електрона $\boldsymbol{m_e} = 9{,}1.10^{-31}$ kg в десетичен формат и каква е вероятността да сбъркате броя на нулите!). Както е известно, изхода от тази ситуация е да се използва т. нар. „научен” или „експоненциален” формат на запис на числата, при който числото се записва във вида

$$A = a.10^{n}$$

където a е реално число, за което $|a| \in [1{,}10]$ и се нарича ***мантиса***, а n е положително или отрицателно цяло число и се нарича ***порядък*** на числото A.

Пример 5: Ето няколко примера за връзката между десетичен и експоненциален формат на запис на числата

$$4{,}235 = 4{,}235.10^{0}$$

$$0{,}0000321 = 3{,}21.10^{-5}$$

$$678954323456 = 6{,}79.10^{11}$$

Вижда се, че, при последния пример, част от цифрите са пропуснати. Това е математически неточно, но при измерването на физични величини може да бъде обосновано и ще бъде коментирано по-нататък.

Използвайки този формат на запис, ние можем да представим с достатъчно голяма точност всяка числена стойност, с която се сблъскваме в практиката. Той, обаче, създава и една възможност за въвеждане на набор от спомагателни измерителни единици, които са много удобни за практическо използване. Нека, например, разгледаме величината дължина. Макар че системната единица е метър, в практическата си дейност ние непрекъснато оперираме с дължини, които имат стойности от порядъка на 10^{-2} m, 10^{-3} m, 10^{-6} m, 10^{-9} m и т. н. Ясно е, че при записа на съответните стойности ние можем да използваме степените на 10 по показания начин и всичко ще бъде наред. Оказва се, обаче, че още по-удобно е да заменим най-често използваните степени на 10 с определени представки към измерителната единица и вместо да използваме дадена степен на 10 да използваме съответната представка. Това е логиката по която в употреба се въвеждат спомагателни единици като, например, сантиметър (cm) = 10^{-2} m милиметър (mm) = 10^{-3} m, микрометър (μm) = 10^{-6} m, нанометър (nm) = 10^{-9} m и т.н.

Пример 6: Използвайки коментираните по-горе начини на запис, например, за дължината на вълната на HeNe лазер ще имаме

$$\lambda = 0{,}0000006328\ m = 632{,}8.10^{-9}\ m = 632{,}8\ nm$$

Вижда се, че последният запис е най-прост и поради това, когато работим с дължини на светлинни вълни от видимия диапазон на спектъра, практически винаги използваме нанометри.

Този подход се използва и при останалите измерителни единици и поради това ние непрекъснато оперираме с огромно множество спомагателни единици от горния тип. Най-често използваните представки са показани в следващата таблица:

Степен	*Представка*	*Обозначение*
10^{-18}	ато	a
10^{-15}	фемто	f
10^{-12}	пико	p
10^{-9}	нано	n
10^{-6}	микро	μ
10^{-3}	мили	m
10^{-2}	санти	c
10^{-1}	деци	d
10^{3}	кило	k
10^{6}	мега	M
10^{9}	гига	G
10^{12}	тера	T
10^{15}	пета	P
10^{18}	екса	E

Примери 7:

$4{,}25.\ 10^{-6}\ m = 4{,}25\ \mu m$

$5{,}67.\ 10^{-11}\ s = 56{,}7\ ps$

$2{,}45.10^{9}\ Hz = 2{,}45\ GHz$

От таблицата се вижда, че стойностите на така въведените спомагателни единици са кратни на стойностите на основните. Поради това те често се наричат ***кратни*** единици.

Както бе споменато, друга обичайна причина за използването на извънсистемни единици е традицията. Най-често те се появяват при използването на обичайните за ежедневието единици за време – минута и час. Например, в ежедневието ние често измерваме скоростта в километри в час (km/h). Това не е проблем, ако всички скорости се измерват в километри в час. Ако, обаче, сравняваме скорост, измерена в километри в час, с друга, измерена в метри в секунда, ще допуснем сериозна грешка тъй като

$$1\frac{km}{h} = 1.\frac{1000\,m}{3600\,s} = \frac{1}{3{,}6}\frac{m}{s} \approx 0{,}278\frac{m}{s}$$

Резюмирайки казаното за извънсистемните единици, трябва да се отбележи, че те са допустими и в много случаи изключително удобни за използване. Задължително е, обаче, много да се внимава за две неща. Първо, когато се сравняват две или повече величини, те винаги трябва да са измерени в едни и същи единици. И второ, когато се замества някаква величина във формула за някакво пресмятане, то задължително е предварително да се провери дали стойността ѝ е дадена в системни единици. Ако не е, то трябва първо стойността ѝ да се изрази в системните единици и едва тогава да се замести във формулата. Неспазването на тези две изисквания обикновено води до абсолютно погрешен резултат. Препоръчителна схема за действие е показана в Пример 8.

2. Методи за измерване

Физичните величини, с които се борави в науката и техниката, са изключително много и разнообразни и конкретните измерителни процедури, чрез които се измерва всяка една от тях, просто не могат да бъдат описани тук. Най-общо, обаче, всевъзможните измерителни процедури могат да бъдат класифицирани в рамките на два основни метода за измерване – ***преки*** и ***косвени***.

Казваме, че едно измерване е ***пряко***, когато съществува специализиран прибор за измерване на дадената величина и схемата на измерването е показаната

Фиг. 1. Принципна схема на пряко измерване на физични величини

като, поне по принцип, стойността на показанието трябва да е точно равна на стойността на измерваната величина. Използваното понятие „прибор” е обобщено и при различните измервания ролята на прибор може да се изпълнява, както от обикновената рулетка или везна, така и от много сложна електронна апаратура. Същественото тук е ***наличието на специализиран прибор*** за измерване на съответната величина, което прави процедурата за измерване пределно проста – осъществява се контакт между измерваната величина и прибора и се отчита показанието.

Въпреки, че за болшинството от важните физични величини съществуват прибори, чрез които те могат да бъдат пряко измервани, все пак остава огромно количество други величини, за които няма или не могат да бъдат реализирани прибори за пряко измерване. За тези величини единствената възможност е да бъдат измерени ***косвено***. Идеята на косвеното измерване на дадена величина е да се намери математическа формула (това може да е дефиниция, закон и т.н.), в която всички останали величини освен измерваната или да са известни или да могат да бъдат измерени пряко. Тогава можем да измерим пряко стойностите на останалите величини, да ги заместим във формулата и да ***изчислим*** стойността на величината, която ни интересува.

Пример 8: В един от предните примери бе приведена формулата на Поазьой за динамичния вискозитет $\boldsymbol{\eta}$ на газ, протичащ през тръба с радиус $\boldsymbol{r}$ и дължина $\boldsymbol{l}$

$$\eta = \frac{\pi r^4 \Delta P t}{8 V l}$$

където ΔP е разликата в наляганията в краищата на тръбата, а V е обемът газ протекъл за време $\boldsymbol{t}$. Величините от дясната страна лесно могат да бъдат измерени със съответните прибори и, ако, например, получим r = 124 μm, ΔP = 1450 Pa, t = 3 min 30 s, l = 3,57 mm, V = 58 ml, то преминаваме към единици в система SI

$$r = 124\ \mu m = 1{,}24.10^{-4}\ m$$
$$\Delta P = 1450\ Pa$$
$$t = 210\ s$$
$$l = 3{,}57\ mm = 3{,}57.10^{-3}\ m$$
$$V = 58\ ml = 5{,}8.10^{-5}\ m^3$$

и, заествайки във формулата получаваме

$$\eta = \frac{\pi.(1{,}24.10^{-4})^4.1450.210}{8.5{,}8.10^{-5}.3{,}57.10^{-3}} = 1{,}37.10^{-4}\ Pa.s$$

Очевидно, чрез тази процедура ние определихме числената стойност на динамичния вискозитет и, в този смисъл, той е измерен. Ясно е, обаче, че това не е пряко измерване защото пряко са измерени стойностите на $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{l}$, ΔP, V и $\boldsymbol{t}$, докато стойността на $\boldsymbol{\eta}$ е изчислена.

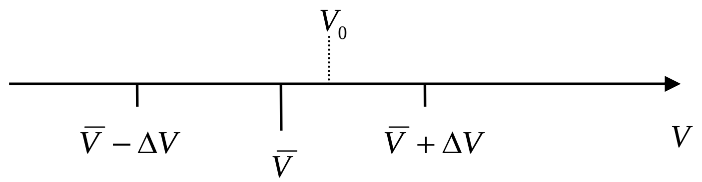
Трябва да се отбележи, че косвени измервания се правят и в много случаи, когато измерваната величина може да бъде измерена пряко, но или не разполагаме със съответния прибор или по някаква причина не можем да го използваме. Например, ако искаме да измерим тока през даден резистор, можем да включим последователно във веригата амперметър и да го измерим пряко. Ако, обаче, не разполагаме с подходящ амперметър или по някаква причина не можем да го използваме, то много често се измерва пряко напрежението върху резистора, а тока се пресмята по закона на Ом $I = V/R$, където R е съпротивлението на резистора. Очевидно, във втория случай имаме косвено измерване на тока, защото пряко се измерва напрежението, а тока се пресмята по формула.

3. Грешки при преките измервания

3.1. Физичен смисъл на абсолютната и относителната грешка

Независимо каква физична величина измерваме и каква е измерителната процедура, няма абсолютно точно измерване. Това означава, че ако V_0 е точната (но неизвестна!) стойност на измерваната величина V, а $\overline{V}$ е измерената стойност, то двете стойности ще се различават (точно съвпадение може да се получи само по някаква невероятна случайност). И тъй като в резултат от измерването ние приемаме, че стойността на измерваната величина е $\overline{V}$, то неизбежно ще допуснем грешка, заменяйки точната (но неизвестна!) стойност V_0 с измерената стойност $\overline{V}$. Очевидно, грешката, която допускаме е $\Delta = |V_0 - \overline{V}|$, но тази формула не ни върши работа, тъй като по условие не знаем V_0 и следователно няма как да пресметнем Δ. Така при всяко коректно измерване на физична величина трябва не само да се получи резултат $\overline{V}$, но и да се ***оцени*** грешката при измерването Δ.

Нека изобразим графично коментираната ситуация на оста от стойности на V така, както е показано на Фиг. 2. От казаното по-горе следва, че ние по принцип не можем да определим точната стойност V_0 и, следователно, не можем да пресметнем точно и грешката Δ. Поради това, единственото, което можем да направим при дадено измерване е да направим някаква ***оценка***



Фиг. 2. Физичен смисъл на абсолютната грешка при измерванията

на грешката. Самата оценка зависи от източниците на грешката, но схемата за оценяване е винаги една и съща. Задачата, която се поставя, е да се построи един интервал с център в точката $\overline{V}$, за който можем да гарантираме, че с определена вероятност съдържа точната стойност V_0 . Ако успеем да построим такъв интервал, то от Фиг. 2 се вижда, че V_0 може да е по-голямо или по-малко от $\overline{V}$, но разликата между тях Δ не може да е по-голяма от полуширината на интервала, която е ΔV . Следователно ΔV може да се използва за оценка на максималната грешка, която сме направили при даденото измерване. Така въведената величина ΔV се нарича ***абсолютна грешка*** на измерването. Това е просто термин, който е общоприет и който може да бъде заменен с друг (например, неопределеност). Важното е да се осъзнае, че така дефинираната величина носи информация за ***максимално възможната грешка***, която евентуалн***о*** сме допуснали при даденото измерване.

Начинът, по който определяме стойността на ΔV зависи от източника на грешката и ще бъде коментиран по-нататък, но, ако сме я определили, е прието резултатът от измерването да се записва във вида

$$V = \overline{V} \pm \Delta V$$

като действията + и – не се извършват.

Смисълът на този запис е, че чрез него ние твърдим, че точната стойност на величината V (V_0) се намира някъде в интервала с център $\overline{V}$ и полуширина ΔV т.е. в интервала $[\overline{V} - \Delta V, \overline{V} + \Delta V]$. Ясно е, че колкото по-тесен е интервала (т.е. колкото по-малка е полуширината ΔV), толкова по-малка ще е грешката Δ и толкова по-точно ще е измерването.

Пример 9: Конкретен пример за такава процедура е разгледан в т. 3.2.4 при отчитането на резултат от скала.

Трябва да се отбележи и това, че така дефинираната абсолютна грешка е величина със същата размерност като $\overline{V}$. Поради това при записването на крайния резултат ***и двете величини от дясната страна трябва да бъдат в едни и същи измерителни единици***.

Пример 10: Ако сме измерили, например с рулетка, че дължината на масата е 1,25 m и сме оценили абсолютната грешка на измерването на 1 mm, то крайния резултат от измерването се записва във вида

$$L = (1{,}250 \pm 0{,}001)\ m$$

В практиката много често се използва още един вид грешка, която се нарича ***относителна***. По дефиниция, ако сме измерили стойност $\overline{V}$ и сме определили абсолютната грешка ΔV, то под относителна грешка на измерването се разбира отношението

$$\varepsilon = \frac{\Delta V}{\overline{V}}$$

Очевидно е, че абсолютната и относителната грешка са в известен смисъл еквивалентни, тъй като, ако знаем едната лесно можем да намерим другата. Ползата от относителната грешка е, че тя дава непосредствена информация за това какво е съотношението между грешката и измерената стойност и по този начин носи директна информация за ***точността на измерването***. Терминът „точност на измерването" не е строго дефиниран (за разлика от „точност на прибор"), но широко се използва в практиката. Качествената връзка между точността на измерването и относителната грешка е обратна пропорционалност т.е. ***голяма точност съответства на малка относителна грешка и обратно.***

Пример 11: Да предположим, че сме измерили някакъв временен интервал със секундомер и сме получили резултат 4 s с абсолютна грешка от 0,2 s. В същото време сме прочели, че костите на някакъв динозавър са датирани на възраст 100 милиона години с абсолютна грешка от 100 хиляди години. Очевидно, втората грешка е много по-голяма от първата и, на пръв поглед, второто измерване е много по-неточно от първото. Ако, обаче, пресметнем относителните грешки в двата случая получаваме

$$\varepsilon_1 = \frac{0{,}2\ s}{4\ s} = 0{,}05$$

$$\varepsilon_2 = \frac{100\,000\ год}{100\,000\,000\ год} = 0{,}01$$

откъдето се вижда, че всъщност второто измерване е 5 пъти по-точно от първото, тъй като във втория случай грешката представлява 1/100 от измервания интервал, докато в първия е 5/100.

От дефиницията, а и от горния пример, се вижда, че, за разлика от абсолютната грешка, относителната винаги е безразмерна величина, тъй като е отношение на две величини с една и съща размерност. Прието е тя да се дава в проценти, като правилото за изразяването ѝ е показаното

$$\varepsilon = \frac{\Delta V}{\overline{V}}.100\ \%$$

Следвайки това правило, оценените в горния пример грешки трябва да се запишат като ε_1 = 5 % и ε_2 = 1 %, а резултата, например от първото измерване, във вида

$$t = 4\,s \pm 5\%$$

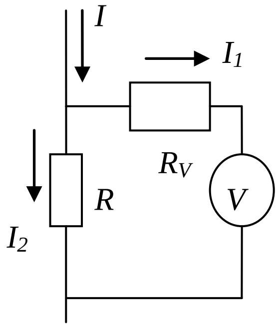
3.2. Оценка на грешката при различните източници на грешки

Грешките, които възникват при измерването на физичните величини, се дължат на действието на много и разнообразни фактори. В зависимост от източника си грешките се делят на ***груби***, ***систематични*** и ***случайни***, като първият тип грешки са ***отстраними***, а вторите два са практически ***неотстраними***. Третирането и оценката на грешката е различно при различните типове и поради това е целесъобразно те да бъдат разгледани отделно.

3.2.1. Груби грешки

Грубите грешки се дължат най-често на незнание или небрежност на експериментатора или на някаква неизправност на измерителния прибор. При наличие на такива грешки е възможно да се измери стойност, която е съвсем различна от стойността на измерваната величина, а понякога даже се оказва, че се измерва друга величина, а не желаната.

Пример 12: Масова практика е да се измерва токът I през даден резистор със съпротивление R като се измерва напрежението върху него U с волтметър и тока се пресмята по закона на Ом



$$I' = \frac{U}{R}$$

Това, което много често се забравя или не се знае е, че всеки реален волтметър има някакво вътрешно съпротивление R_V и при стандартното свързване, показано на фигурата, част от тока на веригата се отклонява през волтметъра. Поради това волтметърът всъщност показва пада на напрежение върху еквивалентното съпротивление на резисторите R и R_V и имаме

$$U = \frac{R\,R_V}{R + R_V} I \quad \Rightarrow \quad I = \frac{R + R_V}{R\,R_V} U$$

Така ние получаваме две формули за определяне на тока във веригата. Едната е масово използвана, но не отчита вътрешното съпротивление на волтметъра. Другата го отчита и е точна. Обикновено вътрешното съпротивление на волтметрите е голямо, така че нека предположим $R_V = 1\ M\Omega$.

Нека сега направим измервания при две различни стойности на R – 10 $k\Omega$ и 10 $M\Omega$ и за простота да предположим, че и в двата случая получаваме едно и също напрежение $U = 100\ V$. Нека стойността на тока, получена по първата формула, означаваме с I′, а точната стойност, получена по втората, означаваме с I . Получаваме

- $R = 10\ k\Omega$

$I' = 0{,}01$ A = 10 mA (измерена стойност)
$I = 0{,}0102$ A = 10,1 mA (точна стойност)

Относителната грешка на измерването е ≈ 1 %, което за повечето приложения е много добра точност.

- $R = 10\ M\Omega$

$I' = 1.10^{-5}$ A = 10 μA (измерена стойност)
$I = 1{,}1.10^{-4}$ A = 110 μA (точна стойност)

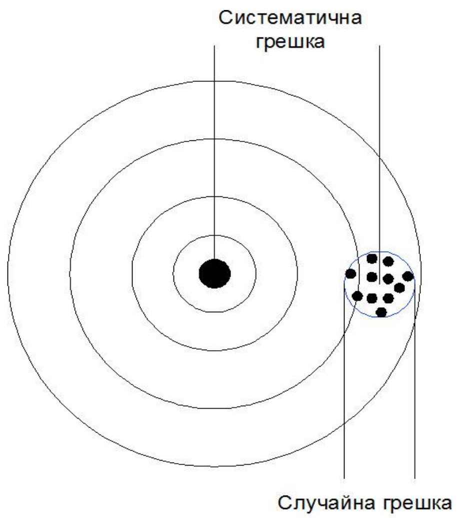
В този случай относителната грешка е ≈ 1000 %, което е недопустимо и е индикация за груба грешка при измерването.

Такава грешка е доста често срещана в практиката и изводът от разгледания пример е, че трябва добре да се познават и разбират физичните процеси, протичащи в хода на измерителната процедура. Както се вижда непознаването или неотчитането им може да доведе до наистина сериозни грешки.

Ясно е, че грешките от този тип не могат (а и няма смисъл!) да бъдат оценявани. Те задължително трябва да бъдат ***отстранени***.

3.2.2.Систематични грешки

Систематичните грешки се дължат на постояннодействащ фактор, който променя показанията на прибора само в една посока. Резултатът е, че се регистрира винаги по-голяма или винаги по-малка стойност от точната. За разбиране на природата на систематичната грешка е полезна една аналогия на измерването със стрелбата по мишена, която е показана на Фиг. 3.



Фиг. 3. Аналогия на измерването със стрелба по мишена

Нека предположим, че стреляме с пушка по мишена, като, за да елиминираме човешкия фактор, предположим, че пушката е закрепена на някаква неподвижна поставка. Тогава пушката може да се разглежда като измерителен прибор, а попадението точно в центъра на мишената може да се разглежда като регистриране на точната стойност на измерваната величина. Ако произведем серия от изстрели, в общия случай резултатът ще бъде показаният на Фиг. 3. Виждат се няколко важни неща. Първо, всеки изстрел попада в различна точка от мишената. Второ, попаденията, макар и в различни точки, са групирани в някаква област. И трето, групата е отместена като цяло от центъра на мишената.

В приведения пример, систематичната грешка се проявява в отместването на групата като цяло от центъра на мишената. Причините за нея могат да бъдат ***вътрешни*** за прибора (например, грешка на човека, извършил първоначалното прицелване, или лоша настройка на самата система за прицелване), но могат да бъдат и ***външни*** (например, постоянен страничен вятър, отклоняващ куршумите). Каквито и да са те, обаче, същественото е, че ***влияят по един и същ начин*** при всеки изстрел от серията. Ако се върнем към реалните измерителни прибори то може да се каже, че при електронните най-честа причина за систематичните грешки е стареенето на електронните елементи или дефект в някой от тях. При механичните, където измерваната величина се преобразува в някакво отместване, най-честата причина е поява на допълнителни сили на триене в резултат на износване или замърсяване на механиката или пък разбалансиране на механиката в резултат на удар или друго външно въздействие. Макар, че в разгледания пример систематичната грешка и нейните източници са очевидни, при реалните измерителни прибори систематичните грешки и техните източници са най-трудно откриваеми и отстраними.

По принцип, грубите и систематичните грешки се смятат за отстраними. Строго взето, обаче, това важи само за грубите грешки. Чрез анализ на измерителната процедура и евеентуална промяна на методиката за измерване те могат да бъдат напълно отстранени. За разлика от тях систематичните грешки никога не могат да бъдат напълно отстранени. Самото им откриване може да се окаже много трудно и понякога единственият начин е даденото измерване да се проведе по друга (независима) методика и да се сравнят резултатите от двете методики. Това, което може да се направи е, чрез периодично ***калибриране*** на измерителния прибор и евентуална ***компенсация*** на причината за грешката, систематичните грешки да бъдат намалени до някакви приемливи за практиката стойности. Те, обаче, никога не могат да бъдат елиминирани напълно. Поради това, при всички измервания, съвкупността от систематичните грешки е един от основните фактори, обуславящ крайната грешка на измерването.

Оценката на систематичната грешка, породена от даден фактор, зависи преди всичко от физичният механизъм на този фактор и, поради това оценката на грешката е различна за различните фактори. Методите за оценяване на систематичните грешки не са предмет на изучаване в лабораторния практикум по физика и ще бъдат евентуално разгледани в следващи курсове по метрология и измерителна техника. На този етап е важно да се осъзнае просто, че систематичните грешки винаги съществуват.

3.2.3. Случайни грешки

Случайните грешки се дължат на фактори, които, подобно на тези при систематичните, влияят на резултата от измерването и отклоняват измерената стойност от истинската, но, за разлика от тях, се променят по един случаен начин в хода на измерванията. Ако се върнем към аналогията, показана на Фиг. 3, то именно те са отговорни за факта, че отделните изстрели не попадат в една и съща точка, а попаденията се разпределят в някаква област от мишената. Както и при систематичните грешки, причините за тези отклонения могат да бъдат вътрешни и външни. В разгледания пример, ***вътрешни*** причини могат да бъдат малки нееднаквости във формата и теглото на куршумите, в заряда на патроните и т.н. ***Външни*** причини могат да бъдат, например, пулсации на духащият страничен вятър. Ако разгледаме един типичен измерителен пример, като измерване на тока в дадена електрическа верига, то източници на случайна грешка могат да бъдат например шумове в електронните компоненти на прибора (такива винаги съществуват, но се проявяват само при измерването на слаби сигнали) или случйни пулсации на самия ток във веригата, породени от някакви външни за прибора източници. Каквито и да са причините, обаче, същественото е, че те не могат да се елеминират или компенсират абсолютно точно, така че породената от тях грешка не може да се отстрани, а може само да се оцени.

Наличието на случайни грешки винаги се проявява в това, че ако направим серия от идентични измервания на една и съща величина при едни и същи условия, не получаваме едни и същи стойности като резултат от измерването. С други думи, ако направим серия от N на брой идентични измервания на величината V, получаваме набор от стойности (V_1, V_2, …… V_N), които изобщо казано са различни. При това положение възникват два основни въпроса. Първо, кой от получените резултати да приемем за резултат от измерването ? И второ, тъй като очевидно има грешки при отделните измервания, как да оценим абсолютната грешка, с която сме определили измерената стойност ? Твърдо правило при отговора на първия въпрос е, че като резултат от измерването (т.е. измерена стойност на V) винаги се приема ***средната*** (в смисъл на средно аритметично) стойност на всички резултати. Следователно, ако с $\overline{V}$ обозначаваме резултата от горното измерване (измерената стойност на V) ще имаме

$$\overline{V} = \frac{V_1 + V_2 + ... + V_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} V_j$$

Отговорът на втория въпрос за оценката на абсолютната грешка е доста по-сложен и зависи преди всичко от това, каква е вероятността за реализация на една или друга случайна стойност и с каква вероятност искаме да гарантираме, че истинската стойност на величината се намира в интервала построен с помощта на оценената абсолютна грешка. Изследването на различни възможности и варианти на действие е сериозен дял от статистиката и теорията на измерванията и не може да бъде коментирано тук. За целите на лабораторния практикум по физика, а и за болшинството практически важни ситуации, обаче, е възможно и достатъчно да изходим от три предположения:

(а) При измерването, вероятността за реализация на произволна случайна стойност се определя от т. нар. „нормално” или „гаусово” разпределение на вероятността, като максимумът на разпределението съвпада с истинската стойност на измерваната величина.

(б) За оценка на грешката правим N на брой идентични измервания, като N ≥ 10.

(в) Оценката за абсолютната грешка е такава, че истинската стойност се намира в интервала, определен от нея с вероятност 0,68 (68 %).

При тези предположения, ***процедурата за определяне на абсолютната грешка*** при наличието на случайни грешки е следната:

(а) Правят се N на брой идентични измервания на величината V и се получават N резултата – (V_1, V_2, …… V_N).

(б) Определя се средната стойност на получените резултати по формулата

$$\overline{V} = \frac{V_1 + V_2 + ... + V_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} V_j$$

която се приема за резултат от измерването т.е. за измерена стойност на *V*.

(в) От средната стойност изваждаме индивидуалните резултати, получавайки отклонението на всяка от индивидуалните стойности от средната

$$\Delta V_j = \overline{V} - V_j$$

(г) Получените отклонения вдигаме на квадрат, получавайки

$$\Delta V_j^2 = (\Delta V_j)^2 = (\overline{V} - V_j)^2$$

и намираме сумата на квадратите $\sum_{j=1}^{N} \Delta V_j^2$

(д) Определяме абсолютната грешка при измерването по формулата

$$\Delta V = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N} \Delta V_j^2}{N.(N-1)}}$$

И накрая, както бе казано по-горе, записваме крайния резултат от измерването във вида

$$V = \overline{V} \pm \Delta V$$

Тази процедура за обработка на резултатите от измерванията, при наличие на случайни грешки, обикновено се нарича ***метод на Гаус***.

Важно е да се отбележи, че усредняването като метод за получаване на резултат от измерването е коректно винаги, когато имаме две или повече измерени стойности. Описаната по горе процедура за оценка на абсолютната грешка, обаче, има смисъл само ако броят на измерванията е по-голям или равен на 10.

Пример 13: Нека, например, в някаква задача се интересуваме от времето, за което дадено тяло изминава определен път и чрез електронна система за отчитане сме направили 10 измервания, получавайки

t = 1,780 s; 1,823 s; 1,818 s; 1,807 s; 1,792 s; 1,800 s; 1,818 s; 1,816 s; 1,796 s; 1,814 s.

Най-удобния начин за получаване на резултата от измерването и оценка на абсолютната грешка е чрез попълване на следната таблица:

№ (на измерването)	t_j, s	$\Delta t_j = \bar{t} - t_j$, s	$\Delta t_j^2 = (\bar{t} - t_j)^2$, s^2
1	1,780	0,026	$6{,}76.10^{-4}$
2	1,823	- 0,017	$2{,}89.10^{-4}$
3	1,818	- 0,012	$1{,}44.10^{-4}$
4	1,807	- 0,001	$0{,}01.10^{-4}$
5	1,792	0,014	$1{,}96.10^{-4}$
6	1,800	0,006	$0{,}36.10^{-4}$
7	1,818	-0,012	$1{,}44.10^{-4}$
8	1,816	-0,01	1.10^{-4}
9	1,796	0,01	1.10^{-4}
10	1,814	-0,008	$0{,}64.10^{-4}$
	$\bar{t}$ **= 1,806** s		$\sum_{j=1}^{N} \Delta t_j^2$ **= 17,5.10^{-4}, s^2**

От таблицата получаваме

$$\Delta t_{сл} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N} \Delta t_j^2}{N.(N-1)}} = \sqrt{\frac{17{,}5.10^{-4}}{10.9}} = 0{,}004\, s$$

3.2.4. Комбинирана грешка и бюджет на грешките

Факторите, пораждащи систематични и случайни грешки, са изключително много и разнообразни и в реалните измерителни прибори, както и в хода на самите измерителни процедури, винаги действат едновременно множество такива фактори. Ясно е, че всеки от тези фактори поражда съответната грешка и тези грешки се наслагват, формирайки някаква резултантна грешка. За практическите измервания най-важна е именно резултантната (сумарната) грешка и това поставя изключително важната задача, ако имаме множество различни източници на грешки, които действат едновременно, да се намери резултантната грешка, която те пораждат съвместно. В съвременната метрология, тази резултантна грешка се нарича ***комбинирана грешка***, а правилото, което показва как отделните грешки, породени от различни източници, се отчитат в комбинираната грешка, се нарича ***закон за разпространение на грешката***. Формулировката на този закон може да е различна в зависимост от това с каква точност искаме да оценим комбинираната грешка и дали между отделните грешки има някаква зависимост (корелация) или няма. Най-често срещаната в практиката ситуация е, когато източниците на отделните грешки са независими. Това означава, че промяната на стойността на коя да е от изходните грешки не влияе на стойностите на останалите. В този случай формулировката на закона за разпространение на грешките е следната:

Ако в хода на дадено измерване едновременно действат съвкупност от независими източници на грешка (както систематични, така и случайни), всеки от които поражда абсолютна грешка, съответно, ΔV_1, ΔV_2 , … , ΔV_j , … , ΔV_N , то комбинираната грешка на измерването е

$$\Delta V = \sqrt{\Delta V_1^2 + \Delta V_2^2 + ...\, \Delta V_j^2 + ... + \Delta V_N^2}$$

Така дефинирана, комбинираната грешка има смисъл на резултантна абсолютна грешка на измерването и именно чрез нея се записва крайния резултат от измерването.

Най-важната (и най-трудна!) процедура за ефективното използване на закона за разпространение на грешките при произволно измерване е формирането на т. нар. ***бюджет на грешките*** за даденото измерване. Това означава да се идентифицират всички основни източници на грешки при даденото измерване и да се оцени абсолютната грешка, която поражда всеки един от тях. Ако се прецени, че отделните грешки са независими, то те просто се заместват в горната формула и се получава комбинираната грешка на измерването.

Едно от най-важните приложения на този закон е свързано с т. нар. ***приборна грешка***. Тъй като тя е изключително важна за всякакви измервания и, в частност, за лабораторните упражнения по физика, ще я разгледаме по-подробно.

Всеки измерителен прибор предполага наличието на някакво показание върху скала, разделена на определен брой деления, или цифров дисплей с фиксиран брой цифри и измерването се свежда до отчитане на това показание. Грешката, с която се получава крайния резултат от измерването, почти изцяло зависи от специфичните особености на конкретния прибор и поради това се нарича ***приборна***. Единият източник на приборната грешка са несъвършенствата на самия прибор. Такива са, например, неточно калибриране, нелинейна връзка между измерваната величина и показанието, хистерезис на показанието, дрейф на нулата и т. н. Резултатът от тях е, че самото показание не е точно. Това означава, че положението на показалеца по скалата не съответства на истинската стойност на измерваната величина или, че стойностите на част от цифрите на дисплея не съответстват на стойността на измерваната величина. Този компонент на приборната грешка можем да наречем ***грешка на измерване*** на прибора. Вторият компонент на приборната грешка е свързан с невъзможността да се отчете абсолютно точно показанието, даже и самото то да е точно. Понякога грешката възникваща по тази причина се нарича ***грешка на отчитане***.

Точното оценяване на приборната грешка изисква отчитане на ефекта и от двата, коментирани по-горе, източника. като се оценят грешката на измерване на прибора и грешката на отчитане от него. След това трябва да се приложи горния закон за разпространение на грешката и да се намери комбинираната грешка, която в случая играе ролята на приборна грешка. Грешката на измерване на прибора, от своя страна, също е комбинирана грешка, която е резултат от множество фактори, влияещи върху работата на прибора, и оценката и е сложна метрологична задача. Обикновено тази задача се решава от производителя на прибора и на потребителя се дава допълнителна информация за грешката на измерване на прибора под някаква форма (например, чрез клас на точност). С течение на времето, обаче, тази информация става все по-недостоверна и това налага периодично калибриране на измерителните прибори. Такова калибриране е задача, която излиза извън обхвата на лабораторния практикум по физика и поради това в хода на лабораторните упражнения тази компонента на приборната грешка просто се пренебрегва т. е. измерителните прибори се смятат за абсолютно точни. Така, ***в лабораторния практикум по физика, оценяването на приборната грешка се свежда до оценяване на грешката при отчитане***.

Грешката при отчитане съществува при всеки прибор даже и да е абсолютно точен. Причината за съществуването ѝ е, че за отчитане на резултата от измерването ние неизбежно ползваме някаква скала, разделена на деления, или пък дисплей, на който има фиксиран брой значещи цифри, както е показано на Фиг. 4.

Фиг. 4. Отчитане показанията на прибор чрез скала и дисплей

Използването на скала е типично за аналоговите измерителни прибори, където изменението на измерваната величина предизвиква преместване на някакъв показалец по скалата и, поне по принцип, положението на показалеца по скалата трябва точно да съответства на стойността на измерваната величина. Величините, които характеризират възможностите на прибора при едно такова измерване, са ***обхват*** и ***константа*** на прибора. Обхватът е равен на стойността на измерваната величина при ***максимално*** отклонение на показалеца и, очевидно, представлява ***максималната*** стойност, която може да бъде точно отчетена (измерена), при съответното включване на прибора. Константата е равна на ***стойността на едно най-малко деление*** на скалата при фиксирания обхват и, очевидно, е ***минималната*** стойност на величината, която може да бъде точно отчетена (измерена) при съответния обхват на прибора. В повечето измерителни прибори има възможност за смяна на обхвата, при което (ако се работи със същата скала) ще се промени и константата на прибора. Много често една и съща скала се ползва за различни обхвати, поради което обикновено избраният обхват се указва отделно, а константата се изчислява, изхождайки от скалата и избрания обхват.

Пример 14: Нека показаната на Фиг. 4 скала принадлежи на волтметър, който е включен на обхват 200 *V*. Това означава, че най-дясното деление (крайното) съответства на 200 *V* . Тъй като скалата е равномерна, оттук следва, че големите деления съответстват на 0 *V*, 50 *V*, 100 *V*, 150 *V* и 200 *V*. Стойността на едно най-малко деление ще намерим като разделим обхвата на броя на най-малките деления, откъдето получаваме $\Delta V =\ 5\ V$. Следователно, при избрания обхват, константата на посочената скала е 5 *V*.

Макар, че изглеждат различно, ситуацията при цифровите (електронните) прибори, където отчитаме резултата от някакъв дисплей, е същата. При дадено включване на прибора винаги съществува някаква максимална стойност на величината, която може да бъде измерена, и тя определя обхвата на прибора. Минималната стойност, която може да бъде точно отчетена, очевидно ще бъде единица от най-ниския разряд на дисплея (най-дясната цифра). Например, ако показаният на Фиг. 4 дисплей е на хронометър, който измерва временни интервали, то наличието на десетична точка (при електронните прибори тя играе ролята на десетична запетая) означава, че първата цифра показва секунди, втората показва десети от секундата, третата – стотни, а четвъртата – хилядни от секундата. Следователно най-късият временен интервал, който може да бъде точно отчетен т.е. константата на прибора е една хилядна от секундата (1 ms).

И за двете системи за регистрация съществуват различни методи за отчитане, които влияят на грешката при отчитането:

(а) ***Отчитане на резултата по скала*** – Нека имаме скалата от Фиг. 4, като предположим, че обхвата й е 200 *V*, и нека се опитаме да отчетем напрежението, което показва уреда. Най-грубото отчитане е като резултат да вземем стойността на най-близкото деление на скалата, а като оценка за грешката да вземем константата на скалата. Тогава ще имаме $V = 135\ V \pm 5\ V = (135 \pm 5)\ V$. Ако прибора е точен, то истинската стойност с абсолютна сигурност лежи в интервала [130 *V*, 140 *V*], но, очевидно, отчитането не е много точно. По-точно отчитане можем да направим, ако приемем за измерена стойност средата на интервала, в който се намира показалеца, а за грешка полуширината му. Получаваме $V = (137{,}5 \pm 2{,}5)\ V$. И накрая, ако скалата е груба (деленията са нарядко) можем да се опитаме да интерполираме „на око” в рамките на делението, отчитайки например $V = (136{,}5 \pm 1)\ V$. Последното отчитане е най-точно, но при него започва да влияе „човешкият” фактор. Ако даже един и същ експериментатор направи няколко последователни отчитания при различно позициониране на очите спрямо скалата (т. нар. „паралаксна” грешка), той най-вероятно ще отчете различни стойности, например, в диапазона [135 *V*, 138 *V*]. Това придава случаен характер на отчитането и го прави по-малко възпроизводимо и надеждно. Поради това, в практиката се ползват първия и втория метод, като абсолютната грешка при отчитането е равна или на константата на скалата или половинката й.

(б) ***Отчитане на резултата по цифров дисплей*** - Ако цифровия прибор е изправен, всички цифри от дисплея трябва да са верни. Поради това тук коректното отчитане е до последната цифра (най-малкия разряд), а абсолютната грешка при отчитането е равна на константата на прибора. Възможно е и тук да предположим, че грешката при измерването е равна на половината от константата, но така въведената грешка има случаен характер и се използва по-рядко.

Вижда се, че и в двата случая наличието на константа на прибора води до неизбежно закръгляне на отчетения резултат от измерването, даже и прибора да е абсолютно точен, а закръглянето е еквивалентно на внасяне на грешка. В зависимост от метода на отчитане, големината на тази грешка е равна или на константата на прибора или на половината й. От горния коментар е ясно, че в лабораторните упражнения по физика съществува опасност от недооценяване на приборната грешка, тъй като се пренебрегва компонентата й свързана с точността на прибора. За да се намали тази опасност, в упражненията по физика е прието ***приборната грешка да е равна на константата на прибора.***

И последното, което трябва да се отбележи по отношение на приборните грешки, е че при измерването на различни стойности на една и съща величина е желателно да се поддържа приблизително една и съща (и то добра) точност на измерването. За много от практическите приложения относителна грешка от 1 ÷ 2 % е съвсем добра, а за някои приложения са допустими даже стойности от порядъка на 5 ÷ 10 %. Ясно е, обаче, че, когато относителната грешка надвиши 15 ÷ 20 %, точността на измерването става неудовлетворителна. Това трябва да се има пред вид когато измерваме различни стойности при фиксиран обхват на прибора, защото от скалата на примерния волтметър, изобразена на Фиг. 4, се вижда, че ако, например, измерим стойности 200 V, 100 V и 50 V, то относителната им грешка ще бъде, съответно, 2,5 %, 5 % и 10%. Ясно е, че измерването на стойности под 50 V ще стане съвсем неточно и за да поддържаме точността на измерването трябва да сменим обхвата (а оттук и константата на прибора). При електронните прибори ситуацията е същата и общият извод е, че за да поддържаме приблизително постоянна и добра точност на измерването при различни стойности на дадена величина, трябва да превключваме обхвата на прибора така, че измерваната стойност винаги да е в горната половина на обхвата.

Коментираното по-горе пренебрегване на един от компонентите на приборната грешка е направено единствено с цел да се облекчи работата на студентите. Трябва да е ясно, обаче, че формирането на максимално пълен и точен бюджет на грешките е от ключово значение за коректната оценка на грешката от дадено измерване. Следващият пример демонстрира колко е важен бюджета на грешките за коректната оценка на грешката от дадено измерване.

Пример 15: В практиката (и особено в лабораторните упражнения по физика) понякога се налага да измерваме временни интервали с ръчен електронен хронометър, който обикновено има константа 0,01 *s*. Често, тази приборна грешка на хронометъра се приема и за абсолютна грешка на измерването и се твърди, че резултатът е получен с абсолютна грешка равна на 0,01 s. Това, което не се взема предвид е, че включването и изключването на хронометъра става ръчно от експериментатора. Прието е, че времето за реакция на добре трениран човек не може да е по-малко от 0,1 s (справка - фалстартовете в бягането на 100 *m*), което означава, че за нетренирания експериментатор е резонно да приемем време за реакция 0,2 s. Следователно можем да приемем, че абсолютните грешки при включването и изключването на хронометъра ще бъдат 0,2 *s*. Тогава абсолютната грешка на цялото измерване ще бъде равна на комбинираната абсолютна грешка, която се получава от отделните грешки по формулата

$$\Delta t = [(\textit{грешка при включването})^2 + (\textit{грешка на хронометъра})^2 + (\textit{грешка при спирането})^2]^{1/2}$$

или

$$\Delta t = \sqrt{(0{,}2)^2 + (0{,}01)^2 + (0{,}2)^2} = 0{,}283\, s \approx 0{,}3\, s$$

В случая, огромното разминаване на абсолютната грешка с константата на хронометъра идва от факта, че ролята на измерителен прибор се играе от системата (човек + хронометър), а не само от хронометъра. Неотчитането на този факт води до непълен бюджет на грешките (пропускат важни източници на грешка), което неминуемо води и до некоректна оценка на грешката на измерването.

Още една важна особеност, свързана с третирането на отделните източници на грешка се вижда от следващият пример:

Пример 16: В Пример 13 пресметнахме случайната грешка при измерването на даден временен интервал и получихме $\Delta t_{сл}$ = 0,04 s. Тъй като константата на уреда е 0,001 s, то приборната грешка ще бъде $\Delta t_{пр}$ = 0,001 s и, следователно, комбинираната абсолютна грешка от измерването е

$$\Delta t = \sqrt{\Delta t_{пр}^2 + \Delta t_{сл}^2} = \sqrt{1.10^{-6} + 1{,}6.10^{-5}} = 0{,}0041\, s \approx \Delta t_{сл}$$

При същото измерване, но с $\Delta t_{пр}$= 0,01 s (дисплеят на измерителния прибор има само 3 цифри) щяхме да регистрираме следните стойности:

t = 1,78 s; 1,82 s; 1,82 s; 1,81 s; 1,79 s; 1,80 s; 1,82 s; 1,82 s; 1,8 s; 1,81 s.

Вижда се, че в тези резултати отново се усеща влиянието на случайната грешка. Ако, обаче, приложим метода на Гаус, получаваме $\bar{t}$ = 1,807 *s* и $\Delta t_{сл}$= 0,0045 *s*. Оттук за комбинираната абсолютна грешка ще имаме

$$\Delta t = \sqrt{\Delta t_{пр}^2 + \Delta t_{сл}^2} = \sqrt{1.10^{-4} + 2{,}02.10^{-5}} \approx 0{,}011\, s \approx \Delta t_{пр}$$

И накрая, ако приборът отчиташе с приборна грешка $\Delta t_{пр}$= 0,1 s (дисплеят имаше само две цифри), то всички отчетени стойности щяха да са еднакви и равни на 1,8 *s*. Следователно, случайната грешка въобще нямаше да се регистрира (което не означава, че не съществува) и по никакъв начин нямаше да влияе на точността на измерването.

Изводът, който следва от този пример е, че случайните грешки влияят на крайната оценка на грешката и има смисъл да се оценяват само, когато са значително по-големи или сравними с приборната грешка. Когато са по-малки по стойност от приборната грешка, тяхното влияние е пренебрежимо или изобщо не се усеща.

Простото правило за да се провери наличието на случайна грешка при измерването на дадена величина е да се направят 2-3 идентични измервания. Ако регистрираните стойности са еднакви или разликите между тях са сравними с приборната грешка, няма смисъл да оценяваме случайната грешка и работим само с приборната. Ако разликите между регистрираните стойности за значително по-големи от приборната грешка, то оценяваме случайната грешка по метода на Гаус и, ако получената случайна грешка е значително по голяма от приборната, то работим със случайната. Ако двете грешки са сравними по големина, прилагаме закона за разпространение на грешката, който е валиден винаги.

4. *Грешки при косвените измервания*

4.1. Източници на грешки при косвените измервания

При косвените методи за измерване, които бяха разгледани в т. 2, по условие нямаме пряко измерване и, например, понятието приборна грешка при тях няма смисъл. Стойността на измерваната величина, обаче, се ***изчислява*** с помощта на ***пряко измерените стойности*** на други величини и всяка неточност в хода на тази процедура ще води до грешка при определяне на стойността на измерваната величина. Очевидно е, че тук имаме два възможни източника на грешки:

(а*) Грешки при изчислението* – Обикновено това са грешки от закръгление или на изходните стойности, които заместваме във формулата, или (по-често) на резултатите от междинните пресмятания. По-подробно разглеждане този тип грешки и на правилата за действие ще бъде направено в следващата т. 5, но за да се добие представа за ефекта от закръгленията, нека разгледаме следния пример:

Пример 17: Нека се опитаме да пресметнем скоростта по познатата формула

$$V = \frac{S}{t}$$

като предварително сме измерили S = 1,918 m и t = 2,187 s. Замествайки, получаваме $V_{точна}$ = 0,877m/s. Ако закръглим S и t, съответно, на 2 m и 2 s, очевидно ще получим $V_{закр}$ = 1 m/s. Разликата между двете стойности е 0,123 m/s, а относителната грешка, генерирана от закръглението е

$$\varepsilon = \frac{\left|V_{точна} - V_{закр}\right|}{V_{точна}} = \frac{0,123}{0,877} \approx 0,14 = 14\%$$

Вижда се, че грешките от закръгление могат да бъдат много сериозни и даже по-големи от грешките при измерването. При внимателно провеждане на изчисленията, обаче, тези грешки могат да бъдат направени пренебрежимо малки така, че да не влияят на точността на крайния резултат. Поради това, при оценката на грешките, те не се отчитат.

(б) *Грешки при преките измервания* – В т.2 бе коментирано, че ако съществува подходяща формула от типа

$$V = f(x, y, z, w)$$

която свързва величината V с величините x, y, z и w (броят им може да бъде произволен), то измерването на V може да се сведе до пряко измерване на x, y, z и w и изчисляване на V по формулата. На практика това се прави като се измерят x, y, z и w и резултатите от измерването им се използват за изчисляване на стойността на V като

$$\overline{V} = f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{w})$$

От предните разглеждания, обаче, е ясно, че, като правило, измерената стойност на една величина не съвпада с точната й стойност. Следователно, замествайки x, y, z и w с измерените, а не с точните им стойности, ние неминуемо ще пресметнем стойността на V с някаква грешка. Ясно е, че грешката при определянето на V ще бъде свързана с грешките при измерването на x, y, z и w. Въпросът е как, ако знаем грешките на x, y, z и w , можем да определим грешката на V ?

4.2. Оценка на грешките при косвените измервания

Правилата, по които се определят грешките при косвените измервания зависят от вида на величините, които са пряко измерени (дали са независими или не), и желаната точност на оценката на грешката. От предните разглеждания е ясно, че основната задача на лабораторния практикум по физика е изучаване на физичните явления и закони, а не реализацията на максимално точни измервания. Поради това се смята за целесъобразно оценката на грешките при косвените измервания да се правят по правила, които дават завишена оценка на грешката в сравнение с правилата, стандартно използвани в курсовете по метрология и измерителна техника. Те дават по-добра гаранция за коректната оценка на грешките на измерванията, а допълнителното им достойнство е, че те са валидни както за независими, така и за зависими физични величини.

С тази уговорка, правилата за оценка на грешките при косвените измервания, които ще бъдат използвани в лабораточния практикум по физика, са следните:

(а) Ако фукционалната зависимост е ***сума или разлика*** т.е.

$$V = (x + y) - (z + w)$$

то

$$\Delta V = \Delta x + \Delta y + \Delta z + \Delta w$$

Пример 18: Нека сме измерили две пътни отсечки получавайки, l_1 = (1246 ± 50) m и l_2 = (3566 ± 120) mm , и нека по някакви причини се интересуваме от общата им дължина (сумата) и от разликата им. От правилото получаваме

$$L^+ = l_1 + l_2 = (4812 \pm 170)\ \mathrm{m} \quad ; \quad L^- = l_1 - l_2 = (2320 \pm 170)\ \mathrm{m}$$

Вижда се, че абсолютната грешка е една и съща, както за сумата, така и за разликата на двете дължини и е равна на сумата от грешките при измерванията на отделните дължини.

(б) Ако функционалната зависимост е ***произведение или частно*** т.е.

$$V = \frac{x\,.\,y}{z\,.\,w}$$

то

$$\frac{\Delta V}{\bar{V}} = \frac{\Delta x}{|\bar{x}|} + \frac{\Delta y}{|\bar{y}|} + \frac{\Delta z}{|\bar{z}|} + \frac{\Delta w}{|\bar{w}|}$$

Пример 19: Нека, например, имаме електродвигател, който издига тяло с маса m на височина h за време t, като консумира ток I при напрежение V. Задачата е да се определи ефективността на двигателя, която се определя от формулата

$$\eta = \frac{\textit{Извършена работа}}{\textit{Консумирана енергия}} = \frac{mgh}{VIt}$$

Нека, за целта сме измерили пряко *m, h, t, I* и *V,* получавайки

m = (100 ± 1) kg $\Rightarrow$ $\frac{\Delta m}{\bar{m}} = 0{,}01 = 1\%$

h = (10 ± 0,1) m $\Rightarrow$ $\frac{\Delta h}{\bar{h}} = 0{,}01 = 1\%$

V = (220 ± 2) V $\Rightarrow$ $\frac{\Delta V}{\bar{V}} \approx 0{,}0091 = 0{,}9\,\%$

I = (1,5 ± 0,05) A $\Rightarrow$ $\frac{\Delta I}{\bar{I}} \approx 0{,}033 = 3{,}3\%$

t = (33 ± 1) s $\Rightarrow$ $\frac{\Delta t}{\bar{t}} \approx 0{,}03 = 3\%$

Следвайки горните правила, получаваме

$$\bar{\eta} = \frac{100.\,9{,}81.10}{220.1{,}5.\,33} = 0{,}9$$

$$\frac{\Delta\eta}{\bar{\eta}} = \frac{\Delta m}{\bar{m}} + \frac{\Delta h}{\bar{h}} + \frac{\Delta V}{\bar{V}} + \frac{\Delta I}{\bar{I}} + \frac{\Delta t}{\bar{t}} = 0{,}01 + 0{,}01 + 0{,}0091 + 0{,}033 + 0{,}03 = 0{,}0921 \approx 9\,\%$$

и можем да запишем η = 0,9 ± 9%. Ако ни е необходима абсолютната грешка за η, то използваме дефиницията на относителна грешка и получаваме

$$\Delta\eta = \bar{\eta}.\frac{\Delta\eta}{\bar{\eta}} = 0{,}9.0{,}0921 = 0{,}08289 \approx 0{,}08$$

Така, че

$$\eta = 0{,}9 \pm 0{,}08$$

Можем да формулираме едно просто мнемонично правило са оценка на грешката при косвените измервания.

Правило: *Абсолютната грешка на сума или разлика от пряко измерени величини е равна на сумата от техните абсолютни грешки. Относителната грешка на произведение или частно на пряко измерени величини е равна на сумата от относителните грешки на тези величини.*

Горните две правила са ограничени само са функционални зависимости от типа „сума-разлика” и „произведение-частно”. За да можем да оценяваме грешката при почти произволни функционални зависимости към тях трябва да се добавят още две правила за оценка на грешката.

(в) Оценка на грешката при степенна функция

Нека $V = x^2$, като x се измерва пряко, а V се изчислява по формулата. Очевидно можем да представим $V = x.x$ и прилагайки правилото за произведение ще получим

$$\frac{\Delta V}{\overline{V}} = \frac{\Delta x}{\overline{x}} + \frac{\Delta x}{\overline{x}} = 2.\frac{\Delta x}{\overline{x}}$$

Същото разсъждение може да се проведе и за $V = x^{\mathrm{n}}$, където n е произволно цяло число, откъдето получаваме

$$\frac{\Delta V}{\overline{V}} = n.\frac{\Delta x}{\overline{x}} \quad \Rightarrow \quad \Delta V = n.\overline{V}.\frac{\Delta x}{\overline{x}}$$

(г) Оценка на грешката при произволна функция на една променлива

Нека $V = f\,(x)$, където f е произволна реална функция. Ако измерим пряко x , получавайки $x = \overline{x} \pm \Delta x$ и, ако вземем предвид, че грешката трябва да е положителна величина, то от дефиницията на производна следва

$$\Delta V = \left| f'(\overline{x}) \right| .\Delta x \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta V}{\overline{V}} = \frac{\left| f'(\overline{x}) \right|}{\overline{V}}.\Delta x$$

където $f'(\overline{x})$ е производната на f при $x = \overline{x}$.

В следващия пример е направена една демонстрация как се използват коментираните правила при оценката на грешката на едно почти произволно косвено измерване.

Пример 20: Нека имаме формулата $V = x + \dfrac{y.\,f(\alpha)}{z^2}$. Ако измерим пряко x, y, z и α, от нея можем да определим косвено V. Нека, в резултат от измерванията, сме получили

$$x = \overline{x} \pm \Delta x;\; y = \overline{y} \pm \Delta y;\; z = \overline{z} \pm \Delta z;\; \alpha = \overline{\alpha} \pm \Delta \alpha;$$

и , следователно, косвено измерената стойност на V е

$$\overline{V} = \overline{x} + \frac{\overline{y}.\,f(\overline{\alpha})}{\overline{z}^2}$$

За да влезем в съответствие правилата за определяне на грешката, полагаме

$$p = f(\alpha)\ ,\ q = z^2\ ,\ r = \frac{y.f(\alpha)}{z^2} = \frac{y.p}{q}$$

където p, q и r са някакви спомагателни величини. Така формулата става $V = x + r$ и от правилото за сума на величини получаваме $\Delta V = \Delta x + \Delta r$. От правилото за произведение ще имаме

$$\Delta r = \overline{r}.\frac{\Delta r}{\overline{r}} = \overline{r}.(\frac{\Delta y}{\overline{y}} + \frac{\Delta p}{\overline{p}} + \frac{\Delta q}{\overline{q}}) = \frac{\overline{y}.f(\overline{\alpha})}{\overline{z}^2}.\,(\frac{\Delta y}{\overline{y}} + \frac{\Delta p}{\overline{p}} + \frac{\Delta q}{\overline{q}})$$

Относителните грешки на p и q определяме от допълнителните правила, коментирани по-горе, и получаваме

$$\frac{\Delta p}{\overline{p}} = \frac{\left| f'(\overline{\alpha}) \right|}{\left| f(\overline{\alpha}) \right|}.\Delta \alpha \quad , \quad \frac{\Delta q}{\overline{q}} = 2\frac{\Delta z}{\overline{z}}$$

Замествайки в обратен ред намираме крайната формула за ΔV

$$\Delta V = \Delta x + \frac{\overline{y}.f(\overline{\alpha})}{\overline{z}^2}.\left(\frac{\Delta y}{\overline{y}} + \frac{\left| f'(\overline{\alpha}) \right| .\,\Delta \alpha}{\left| f(\overline{\alpha}) \right|} + 2\frac{\Delta z}{\overline{z}} \right)$$

5. *Значещи цифри. Закръгление на опитните данни и резултатите от пресмятанията*

Както е известно, в математиката числата могат да се представят с безкрайно голяма точност и, поради това, всяка от цифрите представящи дадено число е еднакво важна. В експерименталните науки (естествени и инженерни), обаче, ние оперираме не с числа в математичния смисъл на понятието, а с числени стойности на различни величини, които се определят чрез измерване. Поради това ролята на отделните цифри, които представят дадена числена стойност е различна.

Пример 21: Нека се опитаме да измерим скоростта на дадено тяло V като измерим пътя S, който изминава за време t, и пресметнем скоростта по формулата $V = S/t$. Нека от измерването на S и t сме получили $S = 7\ \mathrm{m} \pm 1\ \%$ и $t = 2{,}6\ \mathrm{s} \pm 1\%$. Прилагайки правилата от предните точки, получаваме (с точност първите 10 цифри на числата)

$$\overline{V} = 2{,}692307692\ m/s\,; \quad \varepsilon = 1\% + 1\% = 2\,\%\,; \quad \Delta V = \varepsilon.\overline{V} = 0{,}053846153\ m/s$$

откъдето следва, че истинската стойност на V е някъде в интервала [2,638461539 , 2,746153845]. Ако сега погледнем стойността на $\overline{V}$ се вижда, че в нея всъщност са важни първите 3 цифри. Те гарантират, че $\overline{V}$ принадлежи на определения интервал и при това е много близо до центъра му. Останалите цифри просто позволяват едно „фино” уточняване на стойността на $\overline{V}$, което, обаче, не е съществено, тъй като истинската стойност на V така или иначе е неизвестна. Поради това, от съображения за простота, те могат просто да се пропуснат, така че да имаме $\overline{V} = 2{,}69\ m/s$.

От предните разглеждания е ясно, че грешките не се пресмятат абсолютно точно, а се ***оценяват*** т.е. ние по принцип не можем да знаем стойността на грешката с висока точност. Поради това по същата логика можем да ограничим броя на цифрите и в стойността на ΔV, полагайки $\Delta V = 0{,}05$ m/s. Така в крайна сметка получаваме

$$V = (2{,}69 \pm 0{,}05)\ m/s$$

Ясно е, че при пресмятанията, които съпътстват всяко измерване, ние ще получаваме числени стойности, които, по принцип, съдържат безкрайно много цифри. Изводът от разгледания пример е, че всъщност съществената информация за стойността на величината се носи от първите няколко цифри. Останалите цифри внасят една привидна точност, която е фалшива и по-скоро ненужна, тъй като усложнява записването на стойностите. Поради това те просто се пренебрегват чрез подходящо закръгление.

Тази особеност на експерименталните резултати е тясно свързана с понятието ***значещи цифри*** в представянето на дадено число. Обикновено се казва, че в представянето на дадено число, значещи са всички цифри различни от нула. Значеща е и нулата, но само ако е между две други значещи цифри.

Пример 22: Нека разгледаме две числа $N_1 = 0{,}00000250709$ и $N_2 = 78403000$. Ясно е, че нулите и десетичната запетая в началото на първото и нулите в края на второто не носят информация за конкретната стойност на всяко от числата. Тази информация се носи от набора от цифри 250709 за първото и 78403 за второто и именно поради това те са значещите цифри за конкретните две числа. Очевидно, ***броят*** на нулите след десетичната запетая на първото число и накрая на второто също е важен и те задължително трябва да се запишат при представянето им в десетичен формат, но този брой носи информация по-скоро за големината , а не за конкретната стойност на числото. Нещата са още по-прости, ако представим числата в експоненциален формат така, че $N_1 = 2{,}50709.10^{-6}$ и $N_2 = 7{,}8403.10^{7}$. Вижда се, че само значещите цифри участват в записа на мантисата, която определя стойността на конкретното число. Броят на нулите, съответно, преди или след значещите цифри се отразява в порядъка на числата.

Преди да свържем това понятие с правилата за представяне на числените стойности на физичните величини нека разгледаме още един пример.

Пример 23: Нека, например, имаме числото N = 123456789 и нека го закръглим до първата значеща цифра. Ще получим ново число $\overline{N} = 100000000$, което, може да се разглежда като приближена стойност на изходното. Грешката на приближението (или точността му) ще бъде

$$\varepsilon = \left|\frac{N - \overline{N}}{N}\right| = \frac{23456789}{123456789} = 0{,}19 = 19\ \%$$

Ако закръглим до втората значеща цифра, така че $\overline{N} = 120000000$, от горната формула получаваме ε = 0,028 = 2,8 %. Закръглението до третата цифра води до грешка ε = 0,0037 = 0,37% и т.н.

Тази процедура може да се приложи за всякакви числа и, ако го направим, ще констатираме, че закръглението до първата значеща цифра води до грешка в диапазона 1÷40%, до втората – в диапазона 0,1÷4%, до третата – в диапазона 0,01÷0,4 %, и т.н.

Изводът, който следва от горните разглеждания е, че закръглявайки числените стойности на физичните величини, ние внасяме допълнителна грешка в тях, която можем да наречем ***грешка от закръгление.*** Ясно е, че закръгленията са необходими за опростяване на работата, но също така е ясно, че те не би трябвало да влошават точността на измерване. За да се балансират тези изисквания се спазват няколко прости правила.

(а) Тъй като грешките (абсолютни или относителни) се оценяват, а не се измерват или пресмятат точно, то числените стойности, които получаваме за тях, не могат да са с висока точност. Поради това е прието ***числените стойности на грешките да имат не повече от две значещи цифри***. Специално за лабораторните упражнения по физика, където измерванията не се правят с много висока точност, е достатъчна даже една, но с уговорката, че когато тази цифра е 1 преминаваме към запис с две значещи цифри.

Пример 24: Ако сме пресметнали в резултат на някаква оценка следните стойности за абсолютни и относителни грешки

$$\Delta g = 0{,}364782591\ \mathrm{m/s^2} \quad ; \quad \varepsilon_1 = \frac{\Delta g}{\overline{g}} = 0{,}042784592$$

$$\Delta R = 3{,}458265916\ \Omega \quad ; \quad \varepsilon_2 = \frac{\Delta R}{\overline{R}} = 0{,}014729837$$

то в крайния резултат записваме

$$\Delta g = 0{,}4\ \mathrm{m/s^2} \quad ; \quad \varepsilon_1 = 4\ \%$$

$$\Delta R = 3\ \Omega \quad ; \quad \varepsilon_2 = 1{,}5\ \%$$

(б) Когато извършваме пресмятания при косвените измервания, ние обикновено стартираме от числови стойности измерени с нормална точност, но при междинните изчисления се появяват числа, които неизбежно трябва да закръглим. Те се закръглят така, че ***генерираната грешка от закръгление да е поне два порядъка по-малка от очакваната експериментална грешка на крайния резултат***. Ако се смята с калкулатор, най-добре е да не се правят никакви закръгления при междинните пресмятания. Закръгля се едва крайния резултат.

Пример 25: Нека пресметнем средния свободен пробег на въздушните молекули λ по формулата

$$\lambda = \frac{2\eta}{\rho\overline{V}}$$

където динамичният вискозитет η се определя от експерименталните данни, а плътността на въздуха ρ и средната топлинна скорост на молекулите $\overline{V}$ се пресмятат по теоретични формули. За η можем да използваме резултатите от следващия пример, където е получено η = 1,37. 10^{-4} Pa.s с относителна грешка ε = 6 %, а нека за ρ и $\overline{V}$ сме получили стойности, например, ρ = 1,126835196 kg/m^3 и $\overline{V}$ = 463,8373528 m/s. За да оценим ефекта от закръгленията, нека приемем, че стойностите на ρ и $\overline{V}$ са абсолютно точни т.е. грешката им е равна на нула. Следователно, „точната” стойност на λ ще бъде

$$\lambda = \frac{2\eta}{\rho\overline{V}} = \frac{2.1{,}37.10^{-4}}{1{,}126835196.463{,}8373528} = 5{,}242331014.10^{-7}\ m$$

с относителна грешка $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta\eta}{\eta} = 6\%$.

Нека сега закръглим стойностите на ρ и $\overline{V}$ до две значещи цифри, получавайки ρ = 1,1 kg/m^3 и $\overline{V}$ = 460 m/s. Пресмятайки с тях по същата формула, получаваме друга стойност на λ, λ = 5,415019763.10^{-7} m, която може да се разглежда като приближение на „точната” стойност. Грешката на това приближение е

$$\varepsilon = \frac{5{,}415019763.10^{-7} - 5{,}242331014.10^{-7}}{5{,}242331014.10^{-7}} \approx 0{,}0329 \approx 3\%$$

Очевидната причина за тази грешка е фактът, че, закръгляйки по горния начин стойностите на ρ и $\overline{V}$, ние вкарахме в тях грешки от закръгление, съответно, 2,4 % и 0,8 %. Поради това, в резултат от закръглението, относителната грешка на λ стана

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta\eta}{\eta} + \frac{\Delta\rho}{\rho} + \frac{\Delta\overline{V}}{\overline{V}} = 6\% + 2{,}4\% + 0{,}8\% \approx 9\%$$

Вижда се, че ако закръгленията са „груби” т.е. до малко значещи цифри, те генерират в крайния резултат допълнителна грешка от закръгление, която е сравнима с експерименталната грешка. Ясно е, че това е нежелателно и поради това закръгленията трябва да се правят така, че генерираната от тях грешка да е значително по-малка от експерименталната. Ако в разгледания пример закръглим стойностите на ρ и $\overline{V}$ до три значещи цифри грешката от закръгление става ≈ 0,4 % и слабо влияе на крайния резултат. При сложни формули с много междинни пресмятания, обаче, тази грешка се натрупва и може значително да се увеличи. Поради това, за да елиминираме ефекта от закръгленията, най-добре е те да се правят поне до 4 значещи цифри, при което грешката на отделното закръгление е в диапазона 0,001÷0,03 %.

(в) Крайния резултат се закръгля в съответствие с оценената грешка. ***Закръглението се прави така, че грешката от закръгление да е по-малка от оценената експериментална грешка примерно на порядък***. Това означава, че ако оценената грешка на измерването е в диапазона 1÷5%, закръгляме до третата значеща цифра, при което генерираме грешка от закръгляне ≤ 0,4 %. Ако оценената грешка на измерването е в диапазона 0,1÷0,5%, закръгляме до четвъртата значеща цифра.

Правило: *Тъй като в лабораторния практикум по физика типичната точност е в диапазона 1÷5%, то крайните резултати от измерванията се закръглят до* ***три*** *значещи цифри, а оценката за грешката до не повече от* ***две****.*

Пример 26: Нека отново пресметнем динамичния вискозитет от пример 8 като използваме същите данни. Нека при прякото измерване на величините сме определили следните относителни грешки:

$$\frac{\Delta r}{r} = 1\%;\quad \frac{\Delta P}{P} = 1\%;\quad \frac{\Delta t}{t} = 0{,}1\%;\quad \frac{\Delta l}{l} = 0{,}3\%;\quad \frac{\Delta V}{V} = 1\%;$$

От правилата за оценка на грешката получаваме

$$\frac{\Delta\eta}{\eta} = 4\frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta P}{P} + \frac{\Delta t}{t} + \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta V}{V} = 4\% + 1\% + 0{,}1\% + 0{,}3\% + 1\% = 6{,}4\% \approx 6\%$$

Следващата стъпка е да се пресметне стойността на η. Препоръчителният начин на действие, така че пресмятанията да могат да се извършат даже и с обикновен калкулатор, е следният:

Всички стойности, които за значително по-големи или по-малки от 1 представяме в експоненциален формат. Получаваме

$$r = 1{,}24.10^{-4}\ m\ ;\quad P = 1{,}45.10^{3}\ \mathrm{Pa}\ ;\quad t = 2{,}1.10^{2}\ \mathrm{s}\ ;\quad l = 3{,}57.10^{-3}\ m\ ;\quad V = 5{,}8.10^{-5}\ m^{3}$$

Заместваме във формулата и вземайки предвид, че $(1{,}24.10^{-4})^4 = (1{,}24)^4.(10^{-4})^4 = (1{,}24)^4.10^{-16}$, получаваме

$$\overline{\eta} = \frac{\pi.(1{,}24)^4.10^{-16}.1{,}45.10^3.\,2{,}1.10^2}{8.\,5{,}8.10^{-5}.3{,}57.10^{-3}}\ Pa.s$$

Комбинираме всички степени на 10, като вземем предвид, че $\frac{1}{10^a} = 10^{-a}$ и $10^a.10^b = 10^{(a+b)}$. Получаваме

$$\overline{\eta} = \frac{\pi.(1{,}24)^4.1{,}45.\,2{,}1}{8.\,5{,}8.3{,}57}.10^{-3}\,Pa.s$$

Започваме да смятаме, като най-удобно е да се стартира с намирането на $(1{,}24)^4$ и след това получения резултат последователно да се умножи по π, по 1,45 и по 2,1 и да се раздели последователно на 8, на 5,8 и на 3,57. Когато се смята с калкулатор не е необходимо да се правят никакви междинни записи и закръгления. Просто се извършват съответните действия в необходимата последователност. Получаваме

$$\overline{\eta} = 0{,}136533025\ .10^{-3}\ \mathrm{Pa.s} = 1{,}36533025\ .\ 10^{-4}\ \mathrm{Pa.s}$$

Закръгляме до три значещи цифри и получаваме $\overline{\eta} = 1{,}37.10^{-4}$ Pa.s, така че крайния резултат е

$$\eta = 1{,}37.10^{-4}\ \mathrm{Pa.s} \pm 6\%$$

Ако ни е необходима абсолютната грешка, ще имаме

$$\Delta\eta = \overline{\eta}\ .\frac{\Delta\eta}{\overline{\eta}} = 1{,}37.10^{-4}.0{,}06 = 8{,}22.10^{-6}\ \mathrm{Pa.s} \approx 8.10^{-6}\ \mathrm{Pa.s}$$

Следователно

$$\eta = (1{,}37 \pm 0{,}08)\ .10^{-4}\ \mathrm{Pa.s}$$

6. Работа с експоненциален формат на представяне на числата

Експоненциалният формат на представяне на числата бе накратко коментиран в т. 1.3 и бе показано, че когато работим с числа много по-малки или много по-големи от единица, той е практически неизбежен. Тъй като в науката и техниката изключително често се сблъскваме с такива ситуации, то той се използва непрекъснато във всички точни науки. Поради това понякога той се нарича и „научен” формат и владеенето му е задължително за всеки, който работи в областта на науката и техниката.

Представянето на произволно число А в експоненциален формат има вида

$$A = a.10^n$$

където a е реално число и се нарича ***мантиса***, а n е положително или отрицателно цяло число и се нарича ***порядък*** на числото *А*. Знакът на мантисата a се определя от знака на числото А т.е. ако А е отрицателно число, то и a е отрицателно и обратно. Знакът на n се определя от това дали А е по-голямо ($n > 0$) или по-малко ($n < 0$) от единица.

Всяко реално число може да бъде представено, както в десетичен, така и в експоненциален формат. Ако A_d и A_e са представянията на едно и също число, съответно, в десетичен и експоненциален формат то в сила е равенството

$$A_e = \frac{A_d}{10^n}.10^n$$

което дава връзката между двата формата.

Пример 27: Нека имаме числата 56700000 и 0,0000345. Прилагайки горната формула за тях получаваме

$$56700000 = \frac{56700000}{10^7}.10^7 = \frac{56700000}{10000000}.10^7 = 5{,}67.10^7$$

$$0{,}0000345 = \frac{0{,}0000345}{10^{-5}}.10^{-5} = 0{,}0000345.10^5.10^{-5} = 0{,}0000345.100000.10^{-5} = 3{,}45.10^{-5}$$

Очевидно, едно и също число може да се представи по различен начин в експоненциален формат, използвайки различни стойности на порядъка *n*.

Пример 28: Ако, например, имаме числото 0,0285, то в сила са равенствата

$$0{,}0285 = 0{,}285.10^{-1} = 2{,}85.10^{-2} = 28{,}5.10^{-3} = 285.10^{-4}$$

или

$$0{,}0285 = 0{,}00285.10^{1} = 0{,}000285.10^{2} = 0{,}0000285.10^{3} = 0{,}00000285.10^{4}$$

Полезното правило за експоненциалния формат, което следва от този пример, е

Правило: *Когато десетичната запетая в мантисата се премести с една позиция надясно, порядъкът намалява с единица. Когато десетичната запетая се премести с една позиция наляво, порядъкът се увеличава с единица.*

Тъй като горната възможност внася известна неопределеност в експоненциалното представяне на числата, в практиката се използва широко т. нар. ***нормален*** (или ***нормализиран***) ***експоненциален формат***. В този формат представянето на числата е същото

$$A = a.10^n$$

но изискването е порядъкът *n* да е така подбран, че модулът на мантисата $|a|$ да има стойност, принадлежаща на интервала [1, 10]. Ако се върнем към числото 0,0285 , то от горния пример се вижда, че единствената възможност за представянето му в нормален експоненциален формат е $2{,}85.10^{-2}$. По тази причина, като правило, в науката и техниката се работи с нормалния експоненциален формат. Изключение се прави, когато изразяваме стойностите на величините в кратни измерителни единици и когато трябва да сравняваме различни стойности на дадена величина, тъй като тогава те задължително трябва да са изразени чрез един и същ порядък.

Използването на нормалния експоненциален формат прави още по-лесно преминаването от десетичен към експоненциален формат на числата. Двете възможни ситуации са разгледани в следващият пример:

Пример 29:

(а) Нека имаме число, което е по-голямо от единица (например, 56789,321). Тъй като $10^0 = 1$, то може да бъде записано във вида $56789{,}321.10^0$. За да преминем към нормален формат, очевидно десетичната запетая трябва да бъде преместена с 4 позиции наляво така, че пред нея да остане само една значеща цифра. От горното правило следва, че всяко преместване на запетаята с една позиция наляво ще увеличава порядъка на числото с единица. Следователно нормалният експоненциален формат на числото ще бъде $5{,}6789321.\ 10^4$.

Забележка: Ако числото е цяло (например, 56789), то десетичната запетая не се пише, но се предполага, че тя е след последната цифра. Това означава, че можем да го запишем във вида $56789{,}0.10^0$ и да действаме по същия начин като по-горе.

(б) Нека имаме число по-малко от единица (например, 0,00000234). Записваме го във вида $0{,}00000234.10^0$ и, за да преминем към нормален формат, преместваме десетичната запетая с 6 позиции надясно така, че пред нея да остане само една значеща цифра. Тъй като преместването на запетаята надясно намалява порядъка на числото, то за нормалния експоненциален формат на числото получаваме $2{,}34.10^{-6}$.

Правилата за алгебрични действия с числата, представени в експоненциален формат, произтичат от свойствата на степенната функция. Най-важните от тях са следните:

(а) Събиране и изваждане – Ако разполагаме с калкулатор, работещ със степенни функции, просто въвеждаме числата и пресмятаме резултата. Ако, обаче, смятаме наум или на ръка, препоръчително е да преминем към един и същ порядък в представянето на числата (по-големият от двата), да изнесем пред скоби общия множител и да извършим действието с мантисите.

Пример 30: Примери за горната процедура

$$3{,}45.10^6 - 2{,}1.10^4 = 3{,}45.10^6 - 0{,}021.10^6 = (3{,}45 - 0{,}021).10^6 = 3{,}429.10^6$$

$$7{,}821.10^{-6} + 8{,}56.10^{-9} = 7{,}821.10^{-6} + 0{,}00856.10^{-6} = (7{,}821 + 0{,}00856).10^{-6} = 7{,}82956.10^{-6}$$

(б) Умножение и деление – Отново, ако смятаме с подходящ какулатор, просто въвеждаме числата и извършваме съответното действие. Ако, обаче, не разполагаме с такъв и имаме числата $A = a.10^n$ и $B = b.10^m$, то правилата са

$$A.B = a.b.10^n.10^m = a.b.10^{n+m}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{a}{b}.\frac{10^n}{10^m} = \frac{a}{b}.10^{n-m}$$

Пример 31: Примери за умножение и делене

$$3{,}45.10^3.2{,}18.10^6 = 3{,}45.2{,}18.10^{3+6} = 7{,}521.10^9\ ;$$

$$6{,}2.10^4.2{,}8.10^{-9} = 6{,}2.2{,}8.10^{4-9} = 17{,}36.10^{-5} = 1{,}736.10^{-4}$$

$$\frac{2{,}6.10^5}{3{,}2.10^7} = \frac{2{,}6}{3{,}2}.10^{5-7} = 0{,}8125.10^{-2} = 8{,}125.10^{-3}$$

$$\frac{4{,}5.10^{-3}}{3.10^{-9}} = \frac{4{,}5}{3}.10^{-3+9} = 1{,}5.10^6$$

(в) Степенуване и коренуване – От свойствата на степенната функция имаме

$$(A)^m = (a.10^n)^m = (a)^m.(10^n)^m = (a)^m.10^{m.n}$$

$$\sqrt[m]{A} = \sqrt[m]{a.10^n} = \sqrt[m]{a}.\sqrt[m]{10^n} = \sqrt[m]{a}.10^{\frac{n}{m}}$$

Пример 32: Примери за степенуване и коренуване

$$(1{,}5.10^{-6})^4 = (1{,}5)^4.(10^{-6})^4 = 5{,}0625.10^{-24}$$

$$\sqrt{9.10^{-6}} = \sqrt{9}.\sqrt{10^{-6}} = 3.10^{\frac{-6}{2}} = 3.10^{-3}$$

Един от случаите, които генерират най-много грешни пресмятания в лабораторните упражнения, е когато трябва да се пресметне квадратен корен, чиято подкоренна величина е произведение от много малки или много големи стойности. Опитът показва, че в този случай е полезно да се следва процедурата в следващия пример.

Пример 33: Нека, например, да пресметнем стойността на ефективния диаметър на въздушните молекули по формулата

$$D = \sqrt{\frac{T.P_0}{\pi.n_0.T_0.\lambda.P.\sqrt{2}}}$$

където за съответните подкоренни величини са получени следните стойности: T = 295 K, P_0 = 1,01.10^5 Pa, n_0 = 2,69.10^{25} m^{-3}, T_0 = 273 K, λ = 1,56. 10^{-8} m, P = 0,95.10^5 Pa. Една възможна последователност на действие, при която се допускат сравнително малко грешки, е следната:

- Представяме всички стойности в нормален експоненциален формат и ги заместваме във формулата. Получаваме

$$D = \sqrt{\frac{2{,}95.10^2.1{,}01.10^5}{\pi.2{,}69.10^{25}.2{,}73.10^2.1{,}56.10^{-8}.9{,}5.10^4.\sqrt{2}}}$$

- Обединяваме всички степени на 10, използвайки правилата за умножение и деление. Получаваме

$$D = \sqrt{\frac{2{,}95.1{,}01}{\pi.2{,}69.2{,}73.1{,}56.9{,}5.\sqrt{2}}.10^{-16}}$$

- Пресмятаме дробта под корена и получаваме

$$D = \sqrt{0{,}00616191.10^{-16}} = \sqrt{6{,}16191.10^{-19}}$$

- Последното опростяване, което евентуално може да се направи, е да се премине към четна степен на 10 под корена. Получаваме

$$D = \sqrt{61{,}6191.10^{-20}} = \sqrt{61{,}6191}.10^{-10} = 7{,}85.10^{-10}m$$

7. *Организация на данните в таблица*

При организацията на данните от измерванията и изчисленията в таблица няма някакви строги правила, така че са възможни различни оформяния на таблицата. Един от най-често използваните формати е показан в следващия пример:

Пример 34: Нека изследваме движението на тяло, като отчитаме положението му x спрямо някаква начална точка през равни интервали от време и измерваме (или оценяваме) моментните стойности на скоростта V и кинетичната му енергия E_k. Получените данни обикновено се организират в следната таблица:

(Време) ***t*, s**	(Положение) ***x*, m**	(Скорост) ***V*, m/s**	(Кинетична енергия) **E_k, .10^4 J**
0	1	0	0
3	2	0,8	0,0202
6	6,6	1,8	0,081
9	18	3,2	1,822
12	22,6	3,6	3,24
15	33	4,1	5,062
18	53	5,8	7,29
21	66	6,3	9,922

Очевидно в таблицата има заглавен ред, който носи информация за стойностите на величините в съответната колона. Важни са няколко неща:

(а) Задължително трябва да е ясно, коя е величината, чиито стойности са записани в съответната колона. За целта може да се използва наименованието на величината, но може да се работи и само с нейното обозначение, ако от него е ясно за коя величина става дума.

(б) Тъй като всичко написано в заглавния ред се отнася за всички стойности от съответната колона, то най-удобно е единиците, в които са измерени стойностите на дадена величина, да се укажат в заглавния ред. Например, от горната таблица следва, че скоростта в момента $t = 15$ s е равна на 4,5 m/s.

(в) Често, някоя от величините има стойности много по-големи или много по-малки от 1. В тези случаи десетичният формат на запис не е удобен и се използва експоненциалния формат. Ако стойностите са изразени в експоненциален формат, то най-удобно е всички те се приведат до един и същ порядък (т.е. записват се във вида $a.10^n$, като n е едно и също за всички стойности в колоната). Тогава общия множител 10^n може да се изнесе в заглавния ред за да не се пише при всяка стойност. Например, от горната таблица следва, че кинетичната енергия в момента $t = 15$ s е равна на $5{,}062.10^4\ J$.

8. *Графично изобразяване на експериментални зависимости*

Графичното представяне на експерименталните резултати се използва изключително много в точните науки. Често, построените графики се използват за илюстрация на една или друга зависимост, но достатъчно често те се използват и за измерителни цели. Типичната измерителна задача е, ако имаме графика на зависимостта $V = f(x)$, където V и x са някакви физични величини, от графиката да се определи стойността на V при някаква фиксирана стойност на x. За да могат построените графики да отговарят на тези изисквания, при построяването им трябва да се спазват определени правила.

Нека, например, сме провели серия от измервания на две величини V и x, за които ***предполагаме*** (или ***твърдо знаем***), че между тях има някаква функционална зависимост от типа $V = f(x)$. Нека в резултат от измерванията сме получили набор от съответстващи стойности

$$x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_N$$
$$V_1, V_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, V_N$$

Задачата е да се изобрази графично зависимостта $V = f(x)$ в двумерна координатна система, като за целта разполагаме с такава площ, че дължината на абцисата трябва да бъде X_0, а дължината на ординатата трябва да бъде Y_0.

Правило 1: *Стойностите на функцията* ($V_1, V_2, \ldots\ldots, V_N$) *винаги се нанасят по ординатата, а на аргумента* ($x_1, x_2, \ldots\ldots, x_N$) *– по абцисата.*

Процедурата за построяването на графиката се състои от няколко стъпки;

(а) Избор на мащаб по съответните оси – В болшинството случаи по осите се нанасят просто измерените стойности на V и x. В този случай мащаба се нарича ***равномерен***. Макар и рядко, обаче, има случаи, при които стойностите на едната или другата величина се изменят в много широк диапазон (например, няколко порядъка). В тези случаи, вместо самите стойности (например, $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_N$) по оста се изобразява логаритъма от тях т.е. $\ln(x_1)$, $\ln(x_2)$, $\ldots\ldots$, $\ln(x_N)$. Този мащаб се нарича ***логаритмичен***. Като правило, в практикума по физика, се работи с равномерен мащаб.

(б) Избор на скали по съответните оси – Изборът на скали по съответните оси определя как ще се разположат експерименталните точки и построената въз основа на тях графика спрямо координатната система. При избора винаги се спазва следното правило:

Правило 2: *Скалите по съответните оси се избират така, че построената графика да заема по-голямата част от полето (площта), определена за нея. При равномерен мащаб на графиката деленията й трябва да са еквидистантни(т. е. разположени на еднакви разстояния едно от друго).*

За да се удовлетвори това изискване, винаги се изхожда от експерименталните данни, с които разполагаме и които ще изобразяваме. Нека, например, разгледаме абцисата. За нея разполагаме с набор от стойности ($x_1, x_2, \ldots\ldots, x_N$), които трябва да бъдат нанесени и дължина на оста (X_0), с която разполагаме. Началната (x_{min}) и крайна (x_{max}) точка на скалата определят един диапазон от стойности, който трябва да бъде избран така, че

- Всички експериментални стойности (x_1, x_2, ……………, x_N), да принадлежат на избрания диапазон.
- Най-малката експериментална стойност да е максимално близо до началото, а най-голямата – максимално близо до края на диапазона.

След като е определен диапазона се определят и деленията на скалата. При равномерен мащаб оста се разделя на N на брой еднакви деления, като обикновено N варира от 5-6 до 20-30 деления. Стойността на едно деление е $(x_{max} - x_{min})/N$, а дължината му е X_0/N. За по-лесно отчитане, деленията могат да се разделят на големи и малки (подобно на скалата на рулетка).

Скалата по другата ос се определя по абсолютно същия начин, като се изхожда от другия набор от стойности (V_1, V_2, ………….. , V_N).

(в) Обозначаване на величините по съответните оси – За всяка от осите задължително трябва да се укаже ***величината, чиито стойности са нанасяни по тази ос***. За тази цел може да се използва или името или обозначението на величината. Задължително е да се укажат и ***единиците, в които е измервана величината***.

(г) Изобразяване на експерименталните данни – След като скалите на осите са определени, всяка двойка съответстващи стойности (x_j , V_j), определя кординатите на точка спрямо построената координатна система. Определя се мястото на тази точка и на него се поставя знак (той може да бъде кръгче, кръстче и т.н.). По този начин се изобразяват всички експериментални данни (стойности), с които разполагаме.

(д) Построяване на графиката $V = f(x)$ - Данните от таблицата, които са изобразени с точки спрямо координатната система, ни дават функцията в т. нар. „табличен" вид. Реалните величини, обаче, са свързани чрез непрекъснати функции, които в построената координатна система биха се изобразили чрез някакви непрекъснати криви. Следователно, тук задачата е да построим непрекъсната крива, съответстваща на изобразените точки. Понякога изобразените точки просто се свързват с прави линии. Ако експерименталните данни са много и нагъсто, това дава добра представа за функционалната зависимост. Ако, обаче, са малко и са измерени с големи грешки, в графиката обикновено се получават точки на пречупване (Фиг. 6), които не съществуват в природата. Поради това по-добрия вариант за построяването на графиката е да се построи плавна крива (в някои случаи тя може да е права линия), която следва разпределението на експерименталните точки (Фиг. 7).

За илюстрация на тази схема за действие нека построим графиката x(t), ползвайки данните от пример 34.

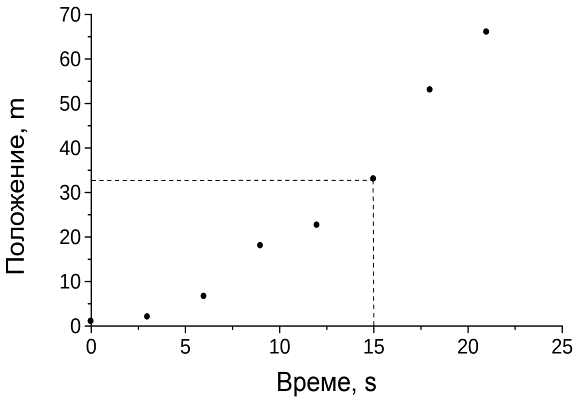
Пример 35: Необходимите ни данни са дадени в първите две колони на таблицата от пример 35, като, очевидно, x е функцията, а t е аргумента. Реализираме последователно стъпките от горната процедура:

(а) Избор на мащаб по съответните оси – Диапазона, в който се изменят стойностите и на двете величини не е прекалено голям, така че избираме равномерен мащаб.

(б) Избор на скали по съответните оси – Стартираме от абцисата. Данните ни са в интервала [0, 21s], така че избираме диапазон на оста [0, 25 s]. Така най-малката стойност на t ще се падне в самото начало на оста, а най-голямата – почти в края. Горната граница избрахме 25 s, тъй като числото 25 е по-удобно при определянето на деленията на скалата от числото 21. По същата логика определяме диапазона на ординатата, избирайки диапазон [0,70 m].

(в) Обозначаване на величините по съответните оси – Използваме, например, наименованията на съответните величини и посочваме единиците им.

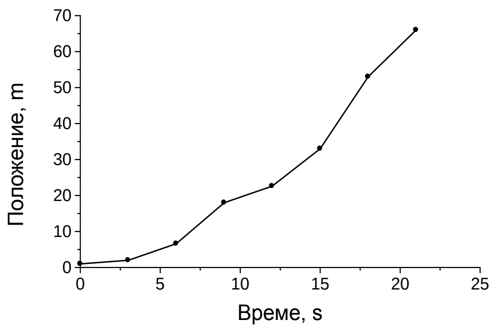
(г) Изобразяване на експерименталните данни – Всяка двойка стойности от експерименталните данни определя точка в така построената координатна система. Използвайки данните като координати, намираме положенията на точките по показания начин и ги отбелязваме с някакъв символ (в случая - ●). Резултатът е показан на долната фигура.



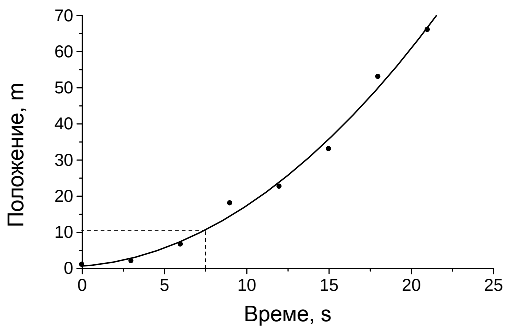
Фиг. 5 Изобразяване на експерименталните данни

(д) Построяване на графиката V = f(x) - Прекарваме плавна линия, следваща хода на експерименталните точки и получаваме графиката, показана на Фиг. 7, на която точките изобразяват получените експериментални данни, а непрекъснатата линия – изследваната функция $V = f(x)$.

На тази графика личи една особеност, която често се появява в практиката. Вижда се, че болшинството точки добре съвпадат с построената крива с изключение на тези при t = 9 s и t= 18 s. Обикновено това е индикация, че при измерването на точно тези стойности е допусната грешка, по-голяма от нормалната. Поради това най-добре е, ако е възможно, тези измервания да се повторят и грешките да се отстранят или намалят. Ако не е възможно допълнително измерване и, ако има точка, която рязко се отклонява от общия ход на функционалната зависимост, то по-добре е тя да се пропусне при построяването на кривата.

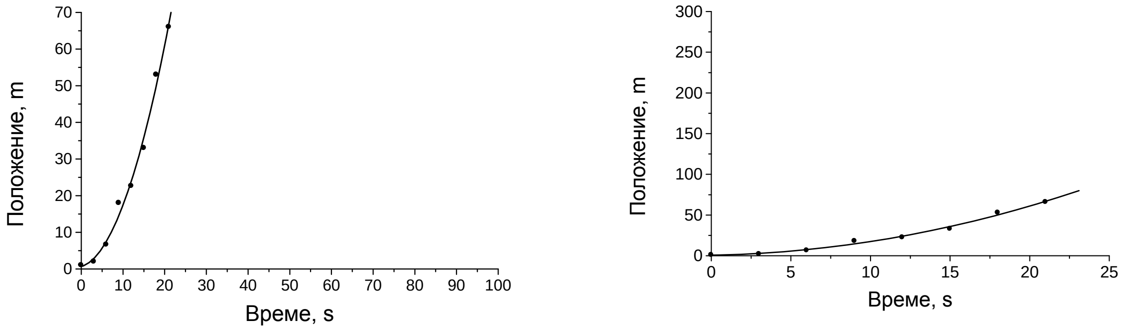


Фиг. 6 Свързване на експерименталните точки с прави линии (неправилно)



Фиг. 7 Апроксимация на експерименталните данни с плавна крива (правилно)

Графики от този тип често се използват за определяне на междинни стойности, за които нямаме експериментални данни. Ако, например, се запитаме какво е положението на тялото в момента t = 7,5 s, то в таблицата няма данни за този момент. От графиката, обаче, лесно можем да отчетем по показания начин, че при t = 7,5 s ще имаме $x \approx 10{,}5$ m. Коментираните по-горе правила за построяване на графики се спазват именно за да може такива отчитания да са достатъчно точни. На следващата фигура са показани два варианта на същата графика, които са построени при неправилен избор на скалата по съответните оси. Вижда се, че при тях горното отчитане ще бъде много по-трудно и неточно.



(а) неправилен избор на скала по абцисата (б) неправилен избор на скала по ординатата

Фиг. 8 Неправилен избор на скалата: (а) по абцисата ; (б) по ординатата

9. *Метод на най-малките квадрати. Линейна регресия (апроксимация).*

Най-често графиките се използват за отчитания по горния начин, когато нямаме никаква представа от какъв тип е зависимостта $V = f(x)$ т.е. каква математична функция е f . Много често, обаче, ние ***предполагаме*** или ***знаем*** от какъв тип е функцията f , но не знаем стойностите на някаква константа (или константи), която участва в нея. В този случай експерименталните данни могат да се използват за определяне на тази константа (или константите) и, следователно, за определяне на аналитичния вид на зависимостта $V = f(x)$. Един от най-често използваните в практиката методи за решаване на подобни задачи е т. нар. ***метод на най-малките квадрати***. Идеята на метода е следната:

Нека предполагаме или знаем, че между величините V и x съществува функционална зависимост от типа $V = f(A, B, x)$, където А и В са неизвестни константи (техният брой може да бъде и по-голям). Ако сме направили N измервания и сме получили набор от съответстващи стойности

$$x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_N$$
$$\overline{V}_1, \overline{V}_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \overline{V}_N$$

където $\overline{V}_j$ е ***измерената*** стойност на V, сответстваща на стойността x_j, то ние можем да си образуваме сумата

$$S = \sum_{j=1}^{N} \left[\overline{V}_j - f(A, B, x_j)\right]^2 = S(A, B)$$

Ако грешките при измерването на V и x имат случаен характер с гаусово разпределение на вероятността, то може да се докаже, че ***най-вероятните стойности на А и В са тези, за които сумата S има минимум***.

Горните твърдения имат проста геометрична интерпретация. Ако построим координатна система по чиито оси нанасяме стойностите, съответно, на x и V, то спрямо нея експерименталните данни ще се изобразят с точки с координати (x_j, $\overline{V}_j$). Функцията $f(A, B, x)$ ще се изобрази с някаква крива (в частни случаи тя може да бъде и права). На произволна измерена стойност x_j ще съответстват две стойности на V. Едната е измерената стойност $\overline{V}_j$, а другата ще бъде $V_j = f(\text{A}, \text{B}, x_j)$, която се определя от уравнението на кривата. Двойките стойности $(x_j, \overline{V}_j)$ и (x_j, V_j) представляват координатите на две различни точки от координатната система. Едната е експериментално определената, а другата лежи на кривата. Ако разполагахме с точните стойности на A и B и ако измерванията бяха абсолютно точни, то щяхме да имаме $\overline{V}_j = V_j$ и точките щяха да съвпадат,а S щеше да равна на нула. Реално, обаче, те няма да съвпадат, тъй като при измерванията винаги има грешка и освен това константите A и B са неизвестни (неопределени). Следователно разликата $\Delta_j = \overline{V}_j - V_j = \overline{V}_j - f(A, B, x_j)$ ще представлява отклонението на експерименталната точка от кривата, мерено по вертикалата. Сумата S ще представлява сумата от квадратите на отклоненията на експерименталните точки от кривата, а от цитираното по-горе доказателство следва, че ***най-вероятното разположение на кривата е това, при което сумата от квадратите на отклоненията на експерименталните точки от нея е най-малка (минимална)***.

Наименованието на метода е свързано именно с тази формулировка и, ако използваме формулирания вероятностен принцип (понякога той се нарича принцип на максималната вероятност) процедурата за определяне на A и B е следната:

Тъй като A и B по условие са неизвестни (неопределени), ние можем да ги разгледаме като независими променливи, от които зависи сумата S. Тогава условието за минимум на S по отношение на A и B се свежда до изискването производните на S по A и B да са едновременно равни на нула. На математичен език това означава, че трябва да са в сила равенствата

$$\frac{\partial S}{\partial A} = 0 \text{ и } \frac{\partial S}{\partial B} = 0$$

Замествайки конкретния вид на S в горните равенства и извършвайки диференцирането, получаваме две уравнения за неизвестните константи A и B. От тях определяме A и B, с което задачата е решена.

По принцип f може да бъде всякаква функция, но на практика този подход се използва най-често, когато предполагаме или знаем, че f е ***линейна*** функция т.е. горната функционална зависимост е от типа $V = A + Bx$. Тъй като това е най-важния за практиката случай, ще разгледаме описаната по-горе процедура по-подробно.

За линейна функция сумата S ще има вида

$$S = \sum_{j=1}^{N} \left[\overline{V}_j - A - B\,x_j\right]^2$$

и замествайки в условията за минимум получаваме

$$\frac{\partial S}{\partial A} = 2.\sum_{j=1}^{N} \left(\overline{V}_j - A - B\,x_j\right) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial B} = -2.\sum_{j=1}^{N} \left(\overline{V}_j - A - B\,x_j\right).x_j = 0$$

Съкращаваме, съответно на 2 и на -2, разкриваме скобите и прегрупирайки получаваме две уравнения за неизвестните константи A и B:

$$A.N + B.\sum_{j=1}^{N} x_j = \sum_{j=1}^{N} \overline{V}_j$$

$$A.\sum_{j=1}^{N} x_j + B.\sum_{j=1}^{N} x_j^2 = \sum_{j=1}^{N} x_j.\overline{V}_j$$

Решавайки ги получаваме формулите за определяне на A и B

$$A = \frac{\sum_{j=1}^{N} x_j^2.\sum_{j=1}^{N} \overline{V}_j - \sum_{j=1}^{N} x_j.\sum_{j=1}^{N} x_j.\overline{V}_j}{\Delta}$$

$$B = \frac{N.\sum_{j=1}^{N} x_j.\overline{V}_j - \sum_{j=1}^{N} x_j.\sum_{j=1}^{N} \overline{V}_j}{\Delta}$$

където

$$\Delta = N.\sum_{j=1}^{N} x_j^2 - (\sum_{j=1}^{N} x_j)^2$$

Заместваме експерименталните данни в горните формули и определяме конкретните стойности на А и В, с което задачата е решена. Така определената функция $V = A + B.x$ се нарича ***линейна регресия на експерименталните данни*** или ***линейна апроксимация на експерименталните данни по метода на най-малките квадрати***.

За да демонстрираме как работи метода нека разгледаме един пример, използвайки данните от пример 34.

Пример 36: Показаната на Фиг. 7 зависимост на положението (пътя) от времето много прилича на квадратична, което съответства на равноускорително движение. Ако допуснем, че изследваното в пример 34 движение е наистина равноускорително, то скоростта би трябвало да се изменя по закона $V = V_0 + a.t$, където V_0 е началната скорост, а a е ускорението. В показаните експериментални данни има информация за V_0, тъй като се вижда, че при $t = 0$ имаме $V = 0$. За ускорението, обаче, няма никаква информация и можем да се опитаме да го намерим използвайки метода на най-малките квадрати. За тази цел ще използваме горните формули като в тях ще трябва да направим следните замени:

$$x_j \Rightarrow t_j \;\; ; \;\; \overline{V}_j \Rightarrow V_j \;\; ; \;\; A \Rightarrow V_0 \;\; ; \;\; B \Rightarrow a$$

$$\sum_{j=1}^{N} x_j \Rightarrow \sum_{j=1}^{N} t_j \;\; ; \;\; \sum_{j=1}^{N} x_j^2 \Rightarrow \sum_{j=1}^{N} t_j^2 \;\; ; \;\; \sum_{j=1}^{N} \overline{V}_j \Rightarrow \sum_{j=1}^{N} V_j \;\; ; \;\; \sum_{j=1}^{N} x_j.\overline{V}_j \Rightarrow \sum_{j=1}^{N} t_j.V_j$$

където V_j са измерените стойности на скоростта от таблицата.

За провеждане на изчисленията е най-удобно експерименталните данни и междинните резултати да се организират в следната таблица:

№ на измерването	t_j, s	V_j, m/s	t_j^2, s^2	$t_j.V_j$, m
1	0	0	0	0
2	3	0,8	9	2,4
3	6	1,8	36	10,8
4	9	3,2	81	28,8
5	12	3,6	144	43.2
6	15	4,1	225	61,5
7	18	5,8	324	104,4
8	21	6,3	441	132,3
N = 8	$\sum_{j=1}^{N} t_j = 84$	$\sum_{j=1}^{N} V_j = 25{,}6$	$\sum_{j=1}^{N} t_j^2 = 1260$	$\sum_{j=1}^{N} t_j.V_j = 383{,}4$

Пресмятаме

$$\Delta = N.\sum_{j=1}^{N} t_j^2 - (\sum_{j=1}^{N} t_j)^2 = 8.1260 - (84)^2 = 3024$$

и от формулите за V_0 и a получаваме

$$V_0 = \frac{\sum_{j=1}^{N} t_j^2 . \sum_{j=1}^{N} V_j - \sum_{j=1}^{N} t_j . \sum_{j=1}^{N} t_j.V_j}{\Delta} = \frac{1260.25{,}6 - 84.383{,}4}{3024} = 0{,}017\ m/s$$

$$a = \frac{N.\sum_{j=1}^{N} t_j.V_j - \sum_{j=1}^{N} t_j . \sum_{j=1}^{N} V_j}{\Delta} = \frac{8.383{,}4 - 84.25{,}6}{3024} = 0{,}303\ m/s^2$$

откъдето следва, че предполагаемият закон за скоростта в разгледания пример ще бъде

$$V = 0{,}017 + 0{,}303.t$$

За да се добие представа за ефективността на метода на най-малките квадрати е добре да се каже, че данните за скоростта в таблицата от пример 34 бяха генерирани предполагайки закон за скоростта $V = at$, като бе предположено, че a = 0,3 m/s^2. След това, за да се имитира измерване, в получените стойности бяха внесени по случаен начин грешки, които варираха от 1% до 8% за различните стойности. Именно по тази причина експерименталните точки в графиката на Фиг. 9 очевидно не лежат на една и съща права линия. Процедурата, обаче, е толкова ефективна, че въпреки големите грешки, тя успя да определи стойността на a с точност около 1%.

Разгледаната методика е аналитична и позволява много точно определяне на неизвестните константи в предполагаемата функционална зависимост. Когато, обаче, имаме много експериментални данни, тя е свързана с доста обемисти изчисления. За да си спестим изчисленията, единия вариант е да се използва компютър със специализиран софтуер. Другият вариант е да се направи една приближена графична имитация на метода на най-малките квадрати. Този вариант често се използва в лабораторни упражнения и процедурата при него е следната:

(а) Правят се N на брой измервания и се получава набор от съответстващи експериментални стойности

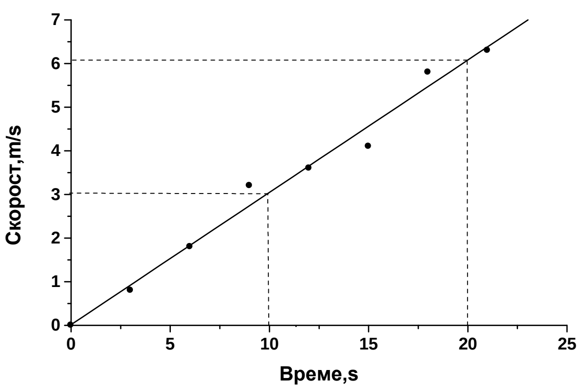
$$x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_N$$
$$\bar{V}_1, \bar{V}_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \bar{V}_N$$

(б) Следвайки правилата от т. 7 се построява подходяща координатна система и наличните експериментални данни се изобразяват в нея чрез точки.

(в) По усмотрение на експериментатора се построява права, която да е разположена спрямо експерименталните точки така, че сумата от квадратите на отклоненията им да е минимална. Тя изобразява графично търсената функция $V = A + B.x$.

(г) От построената права се определят A и B. Константата A се определя от пресечната точка на правата с ординатата. Константата B е равна на производната $\dfrac{dV}{dx}$ и за определянето й могат да се използват две точки ***от правата*** (а не от експерименталните стойности!!) по показания по-долу начин. За по-точно отчитане е желателно тези две точки да са в краищата на измерителния интервал.

Пример за реализацията на тази процедура е показан на Фиг. 9.



Фиг. 9 Линейна апроксимация (регресия) на експериментални данни по метода на най-малките квадрати

На нея са изобразени експерименталните данни от пример 36 и определената в резултат на пресмятанията права. В конкретния случай началната скорост V_0 (константа А) ще трябва да бъде приета за нула. Тъй като за линейна функция винаги е изпълнено

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1}$$

то ускорението (константа В) можем да определим използвайки две точки от правата по показания начин. Получаваме $a \approx 0{,}31$ m/s^2.

Вижда се, че, при добре построена графика, графичното определяне на константите е достатъчно точно. Слабото място на тази процедура е построяването на правата, тъй като то се прави „на око” и е твърде субективно. Точна рецепта за това построяване няма и не може да има, но е добре да се спазва следното правило:

Правило: *Ако е възможно, правата се построява така, че да минава минимум през 3 експериментални точки, а останалите точки да са приблизително равномерно разпределени от двете й страни.*

По-горе бе отбелязано, че линейната апроксимация е най-често използваната при обработката на експериментални данни. Причина за това е не само фактът, че линейните зависимости са често срещани в природата и техниката, но и фактът, че много от нелинейните зависимости могат да бъдат „линеаризирани” и изследвани по горния начин. Ето един пример за начина, по който става това.

Пример 37: Нека, например, се опитаме да изследваме закона на Стефан за излъчването на абсолютно черно тяло

$$I = \sigma T^4$$

където I е интензитетът на лъчението, T е температурата на тялото, а σ – константата на Стефан-Болцман. За да проверим валидността му, очевидно трябва да го представим във вида

$$I = pT^q$$

където p и q са някакви константи и да се опитаме да определим тези константи от експерименталните данни. За да „линеаризираме” зависимостта, логаритмуваме двете страни на последното равенство и получаваме

$$\ln I = \ln p + q \ln T$$

Полагайки $V = \ln I$, $x = \ln T$, А = ln$p$ и В = q, виждаме, че това е точно линейна зависимост от типа V = А + Вx, която може да бъде изследвана по същия начин както в предния пример.