

ЕКСПЕРИМЕНТАЛНА ПРОВЕРКА НА ЗАКОНА НА СТЕФАН - БОЛЦМАН

Кратко теоретично въведение:

Топлинно лъчение (ТЛ) е електромагнитното излъчване на телата, чиято температура е по-висока от абсолютната нула. Топлинното лъчение е равновесно излъчване, което означава, че в изолирана система, излъчената енергия е равна на погълнатата като тялото остава в състояние на термодинамично равновесие.

Топлинното излъчване като електромагнитно поле (ЕМП) се характеризира с величината обемно-спектрална плътност на енергията $\rho(\nu, T)$ измервана в единици $[\text{J}\cdot\text{s}/\text{m}^3]$ и свързаната с нея пълна обемна плътност на енергията измервана в $[\text{J}/\text{m}^3]$. Тези характеристики на топлинното излъчване не зависят от природата на телата, които го създават а само от тяхната температура, затова понякога се казва, че температурата на равновесното топлинно излъчване е равна на температурата на тялото.

За да получим представа за свойствата на топлинното излъчване обаче, трябва накратко да обсъдим основните излъчвателни характеристики на нагретите тела, като спектрална излъчвателна способност, спектралната поглъщателна способност, и свързаните с тях интегрални величини [1,2].

Спектралната излъчвателна способност $r_{\nu, T}$ която се измерва в единици $[\text{J}/\text{m}^2]$ представлява излъчената енергия за единица време от единица площ на повърхността на тялото в единичен честотен интервал $d\nu$ около честотата ν .

Съответно свързаната с $r_{\nu, T}$ пълна или интегрална излъчвателна способност за целия диапазон от честоти се дава чрез:

$$R_T = \int_0^{\infty} r_{\nu, T} d\nu, \quad [\text{W}/\text{m}^2] \quad (1)$$

Спектралната поглъщателна способност на тялото $a_{\nu, T}$, е безразмерна величина, която показва каква част от енергията на електромагнитното лъчение в диапазона от честоти от ν до $\nu+d\nu$, попаднала върху единица площ за единица време, при дадена температура T се поглъща от него. Тяло което поглъща изцяло падналото върху него електромагнитно излъчване ($a_T=1$), независимо от неговия спектрален състав, поляризация или посока на разпространение се нарича абсолютно черно тяло (АЧТ). Излъчването на абсолютно черното тяло представлява топлинно излъчване с температура, равна на температурата на тялото (топлинно или още равновесно излъчване). Добър модел за абсолютно черно тяло е например куха обвивка с непрозрачни поглъщащи стени, поддържани при постоянна температура в които е направен малък отвор. В заградения от обвивката обем се установява почти равновесно лъчение малка част от което непрекъснато напуска обвивката през отвора. Така отворът може да се разглежда като абсолютно черно тяло с температура, равна на температурата на равновесното лъчение, т.е. на обвивката. По тази логика, съществуват редица тела в природата, които с приближение ($a_T \leq 1$) могат да се разглеждат като абсолютно черни, тъй като излъченото от тях електромагнитно поле съответства на тяхната температура. Такива са например Слънцето или електрическа крушка с нажежаема нишка.

Съотношението между спектралната излъчвателна и спектралната поглъщателна способност на телата не зависи от природата на телата и се явява за всички тела една и съща универсална функция на честотата и температурата (наречена универсална функция на Кирхоф). Това твърдение е формулираният през 1859 г. от Кирхоф закон:

$$r_{\nu,T} / a_{\nu,T} = f(\nu, T), [\text{J/m}^2] \quad (2)$$

Универсалната функция на Кирхоф е равна на излъчвателната способност на АЧТ ($a_{\nu,T}=1$), и е свързана с обемно-спектралната плътност на енергията на топлинното излъчване като ЕМП в пространството чрез формулата:

$$\rho(\nu, T) = \frac{4}{c} f(\nu, T), [\text{J}\cdot\text{s/m}^3] \quad (3)$$

През 1879 г. австрийският физик Йозеф Стефан анализирайки експериментални данни установява, че за произволно нагрятото тяло интегралната излъчвателна способност R_T е право пропорционална на четвъртата степен на нейната абсолютна температура T . Малко по-късно (през 1884 г.) неговият сънародник Лудвиг Болцман от термодинамични съображения получава известната днес зависимост свързваща интегралната излъчвателна способност на абсолютно черно тяло с неговата температура T , наречена закон на Стефан:

$$R_{T, \text{АЧТ}} = \sigma T^4, [\text{W/m}^2] \quad (4)$$

където $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{W/m}^2 \text{K}^4$ е т.нар. *константа на Стефан-Болцман*.

Тъй като в затворен краен обем, топлинното излъчване може да се представи като съвкупност от стоящи вълни, то за получаването на универсалната функция на Кирхоф е необходимо да бъде определен техният брой и енергия (т.е. да се определи обемната плътност на енергията). Релей и Джинс направили такъв опит и установили, че обемната плътност на енергията на топлинното излъчване и респективно универсалната функция на Кирхоф $f(\nu, T)$ на АЧТ в честотния интервал $d\nu$ могат да се определят по формулата.

$$f(\nu, T) = \frac{\nu^2}{c^2} kT, [\text{J/m}^2] \quad (5)$$

Във формулата на Релей и Джинс съществува фундаментален проблем - пълната енергия на топлинното излъчване и съответно интегралната излъчвателна способност при нарастване на честотата клонят към безкрайност. През 1900 г. на Планк му се удава да разреши този проблем и изключително точно да получи универсалната форма на функцията $f(\nu, T)$. За целта му се налага да направи предположението, че електромагнитното излъчване се изпуска под формата на отделни порции енергия (кванти), големината на които е пропорционална на честотата на излъчването:

$$\varepsilon = h\nu, [\text{J}] \quad (6)$$

където $h = 6.62 \cdot 10^{-34} [\text{J}\cdot\text{s}]$ е константата на Планк. Видът на функцията на Кирхоф намерена от Планк е следния (дадена чрез честотата и чрез дължината на вълната - фиг.1):

$$f(\nu, T) = \frac{h\nu^3}{c^2 (e^{h\nu/kT} - 1)}, [\text{J/m}^2] \quad \leftrightarrow \quad I(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 (e^{hc/kT\lambda} - 1)}, [\text{W/m}^3] \quad (7)$$

($I(\lambda, T)$ получаваме като умножим $f(\nu, T)$ с $2\pi c/\lambda^2$ и заместим ν с c/λ), $k = 1.38 \cdot 10^{-23} [\text{J/K}]$ е константа на Болцман, $c = 3 \cdot 10^8 [\text{m/s}]$ е скорост на светлината.

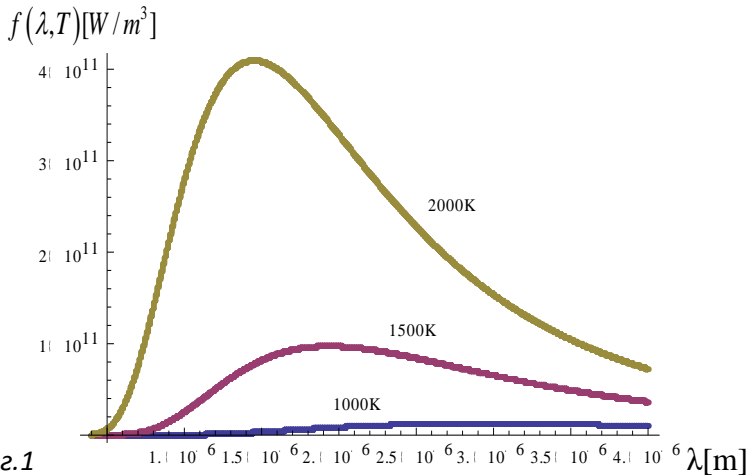
Използвайки своята формула, Планк аналитично получава израз за интегралната излъчвателна способност (1) на АЧТ който идеално съответства на получения по-рано по експериментален път закон на Стефан-Болцман:

$$R_{T, \text{АЧТ}} = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} T^4 = \sigma T^4, [\text{W/m}^2] \quad (8)$$

Обикновено законът на Стефан-Болцман се дефинира във формата дадена в (8) но често се записва и чрез мощността на топлинното излъчване на АЧТ, изразена във ватове:

$$P = a_T S \sigma T^4, [W] \tag{9}$$

където S е излъчващата повърхност на тялото, ($a_T \leq 1$) е безразмерен параметър наречен излъчваемост, който зависи по сложен начин от температурата, материала, вида и състоянието на излъчващата повърхност.



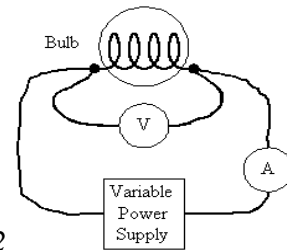
Фиг.1

На Фиг. 1. е показана излъчвателна способност (функцията на Кирхоф) на АЧТ за 1000, 1500, 2000 Келвина.

С повишаване на температурата Максимумът на кривата се отмества към по-малките дължини на вълните.

Опитна постановка и идея за експеримента.

Опитната постановка (Фиг. 2) се състои от халогенна електрическа крушка с волфрамова нажежаема нишка, която се захранва с регулируем токоизправител. Токът се измерва по показанията на амперметъра (от дисплея на токоизправителя), а прецизното измерване на напрежението става чрез свързания към халогенната крушка волтметър.



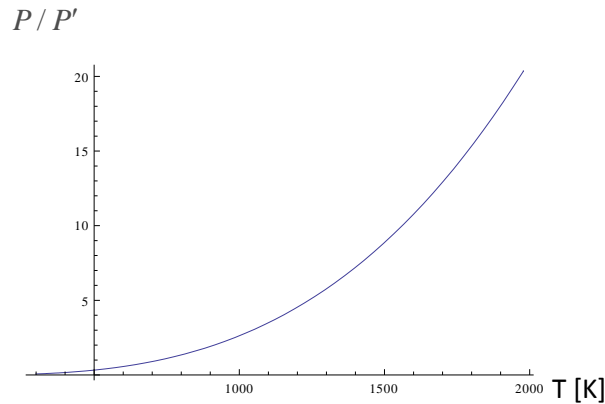
Фиг. 2

Благодарение на възможността за достигане на високи температури, волфрамовата нажежаема нишка изключително често се използва като светлинен източник в инфрачервената и видимата спектрални области. При използване на стандартна електрическа крушка обаче, по-голямата част от излъчването се разпределя в инфрачервената област и само малка част попада във видимата област. При ниски температури (300-800K) голяма част от консумираната от нишката електрическа мощност се отдава чрез топлопроводност на околната среда (Фиг.3).

За определяне мощността на топлинното излъчване, ще използваме модел [3], според който консумираната електрическа мощност P_{el} се разпределя в две компоненти: нерадиационен топлообмен P' и електромагнитно топлинното излъчване P ,

$$P_{el} = P' + P = a(T_{нишка} - T_{среда}) + bT_{нишка}^4 \tag{10}$$

където коефициентите a и b зависят от параметрите на използваната електрическа крушка.



Фиг.3.

На *фиг. 3* е показано отношението P/P' на електромагнитното към нерадиационното топлинно излъчване на използваната халогенна крушка.

Задачи и начин на изпълнение: (съкратен вариант)

Използва се факта че $P_{ел} \sim P$ при $T > 1500K$

програма за обработка: http://phys.tu-sofia.bg/collection/Arabadzhiev/Stefan's_law.xls

Строи се таблица съдържаща следните колонки с данни: $i, u, r, r/r_0, T, \ln T, P_{ел}, \ln P_{ел}$.

1. Определяне на тока i и напрежението u , подадени към електрическата крушка в интервала от $i = 1 A$ до $i = 1.70 A$ и за $i = 0.1 A$
 - a. Необходима е прецизно измерена стойност на u (чрез цифровия волтметър) при ток $i = 0.1 A$ (За изчисляване на съпротивлението при стайна температура).
 - b. Необходими са няколко измервания на напрежението в диапазона $i = 1 A - 1.7 A$.
2. Определяне на съответните съпротивления на волфрамовата нажежаема жичка при измерените стойности на i и u .
 - a. Съпротивлението при $i = 0.1 A$ е приблизително равно на съпротивлението при стайна температура r_i . Измерваме стайната температура.
 - b. От температурната зависимост на съпротивлението $r_i = r_0(1 + \alpha t + \beta t^2)$ при $\alpha = 4.82 \cdot 10^{-3} \text{ } ^\circ K^{-1}$ и $\beta = 6.76 \cdot 10^{-7} \text{ } ^\circ K^{-2}$ и чрез определеното вече r_i се изчислява съпротивлението при $0^\circ C$: $r_0 = r_i / (1 + 4.82 \cdot 10^{-3} t + 6.76 \cdot 10^{-7} t^2)$, [Ω].
3. Определяне на абсолютната температура на волфрамовата нажежаема нишка за намерените стойности на електрическото съпротивление:

$$T = 273.15 + \frac{1}{2\beta} \left[\sqrt{\alpha^2 + 4\beta \left(\frac{r}{r_0} - 1 \right)} - \alpha \right] \leftrightarrow T = \sqrt{2,704 \cdot 10^{-6} \frac{r}{r_0} + 2,053 \cdot 10^{-5} * 739645 - 3292}. [K]$$

4. Изчисляване на консумираната електрическа мощност: $P_{ел} = i.u$, [W]
5. Експериментална проверка на закона на Стефан-Болцман.
 - a. След логаритмуване на двете страни на (9) записваме закона на Стефан-Болцман във вида $\ln P = n \ln T + const$. За да определим n , от експерименталните данни изчисляваме $\ln P_{ел}$ и $\ln T$. От логаритмуваните стойности на $P_{ел}$ и T построяваме графично зависимостта на $\ln P_{ел}$ от $\ln T$ (Фиг.6), която анализираме в участъка $T > 1500K$ ($i \approx 1 A - 1.7 A$ или $\ln T > 7$), където $P_{ел} \sim P$.
 - b. Проверяваме приблизително степенния показател на температурата в закона на Стефан чрез изчисляване на наклона $n = \Delta \ln P_{ел} / \Delta \ln T$ в линейния участък на

кривата ($\ln T > 7$) (фиг. 6). Теоретичната стойност на степения показател в закона Стефан-Болцман (9) е $n_T = 4$. Според фиг.3 грешката при определяне на P при 1500K е около 10%, като при по-високи температури намалява. Максималната грешката при определяне на r_t е около 12%.

(Вариант 2, *пълнен, незадължителен). Задачи и начин на изпълнение:

Построява се таблица съдържаща следните данни: $i, u, r, r/r_0, T, \ln T, P_{el}, P, \ln P$.

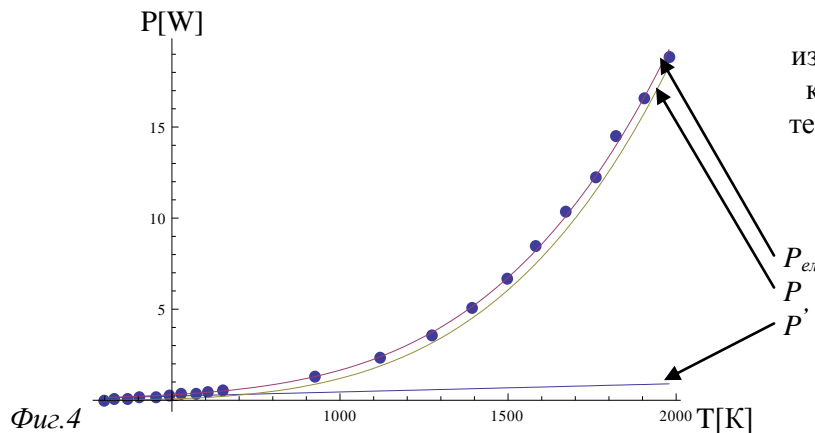
1. Определяне на тока i и напрежението u , подадени към електрическата крушка в интервала от $i = 0.10 A$ до $i = 1.60 A$.
 - Измерванията на напрежението u при малки токове ($i = 0.1 A$ и $i = 0.2 A$) се правят чрез цифровия волтметър, като се избира подходящ обхват.
2. Определяне на съответните съпротивления на волфрамовата нажежаема жичка при измерените стойности на i и u : $r = u/i$
 - a. Съпротивлението при $i = 0.1 A$ е приблизително равно на съпротивлението при стайна температура r_t . Измерваме стаината температура.
 - b. От температурната зависимост на съпротивлението $r_t = r_0(1 + \alpha t + \beta t^2)$ при $\alpha = 4.82 \cdot 10^{-3} \text{ } ^\circ K^{-1}$ и $\beta = 6.76 \cdot 10^{-7} \text{ } ^\circ K^{-2}$ за волфрама и чрез определеното вече r_t се изчислява съпротивлението при $0^\circ C$: $r_0 = r_t / (1 + 4.82 \cdot 10^{-3} t + 6.76 \cdot 10^{-7} t^2)$, [Ω],
3. Определяне на абсолютната температура на волфрамовата нажежаема нишка за намерените стойности на електрическото съпротивление:

$$T = 273.15 + \frac{1}{2\beta} \left[\sqrt{\alpha^2 + 4\beta \left(\frac{r}{r_0} - 1 \right)} - \alpha \right] \leftrightarrow T = \sqrt{2,704 \cdot 10^{-6} \frac{r}{r_0} + 2,053 \cdot 10^{-5} * 739645 - 3292}. \text{ [K]}$$

4. Изчисляване на консумираната електрическа мощност: $P_{el} = i u$, [W]
5. Изчисляване на мощността отдадена за електромагнитно излъчване.
 - a. Изчислява се коефициента $a = \frac{P_{el}(i = 0.1A) - P_{el}(i = 0.2A)}{T(i = 0.1A) - T(i = 0.2A)}$, [W/K] който дава изменението

на P_{el} при изменение на температурата с $1K$ в участъка с ниски стойности на T , когато по-голямата част от консумираната електрическа мощност се разсейва чрез нерадиационен топлообмен с околната среда. Съществуващата в този участък зависимост е линейна тъй като $P' = a(T_{нишка} - T_{среда})$.

b. Пресмятаме мощността, отдадена за електромагнитно топлинно излъчване по формулата: $P = P_{el} - P'$



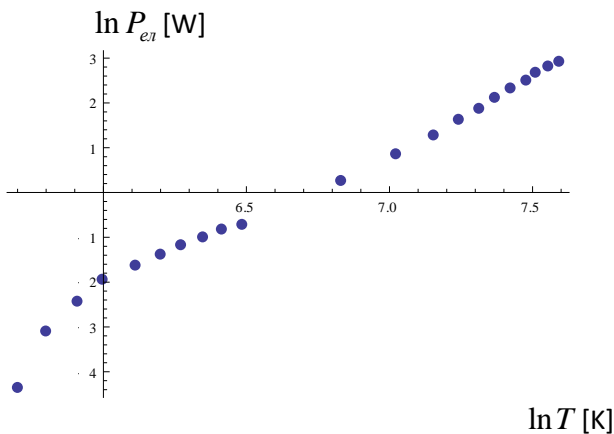
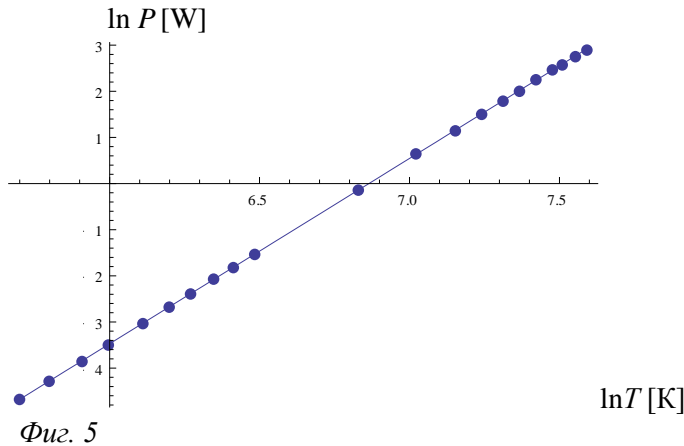
На фиг. 4 е представено изменението на P_{el} , както и двете и компоненти P и P' . При високи температури ($T > 1500K$), $P \sim P_{el} \gg P'$.

5

Фиг.4

6. *Експериментална проверка на закона на Стефан-Болцман.*

- a. След логаритмуване на двете страни на (9) записваме закона на Стефан-Болцман във вида $\ln P \approx n \ln T + const$. Изчислявайки $\ln P$ и $\ln T$ от експерименталните данни, трябва да определим стойността на n . Логаритмуваме получените по-горе стойности на P и T и построяваме графично зависимостта на $\ln P$ от $\ln T$ (Фиг. 5).
- b. Определяме приблизително степенния показател на температурата в закона на Стефан-Болцман чрез изчисляване на наклона на получената линейна зависимост т. е. пресмятаме отношението $n = \Delta \ln P / \Delta \ln T$. Теоретичната стойност на степенния показател в закона в закона на Стефан-Болцман (9) е $n_T = 4$. Грешката в измерванията с малки токове е около 12%



На е Фиг. 6 е представена зависимостта $\ln P_{el}$ от $\ln T$ в целия температурен диапазон $T \sim 300 - 2100\text{K}$

Използвана литература:

1. И. В. Савелиев, „Курс Общей Физики”, том 5, Астарель, 2001.
2. Илков, Л. Длъгников, „Ръководство за лабораторни упражнения”, София, 2006
3. Вен-Уаков S., Peretz M., Hesterman B., „A SPICE compatible behavioral electrical model of a heated tungsten filament”, Applied Power Electronics Conference and Exposition, 2005. Twentieth Annual IEEE, v. 2, p. 1079-1084.
4. <http://www3.wooster.edu/physics/JrIS/Files/Carter.pdf>