

Векторно представяне на хармонично трептене. Събиране на хармонични трептения с еднакво направление. Биене. Събиране на хармонични трептения в две взаимно перпендикулярни направления. Частни случаи. Фигури на Лисажу. Затихващи и принудени трептения – основни характеристики, уравнения на движение, диференциални уравнения. Резонанс

Векторно представяне на хармонично трептене

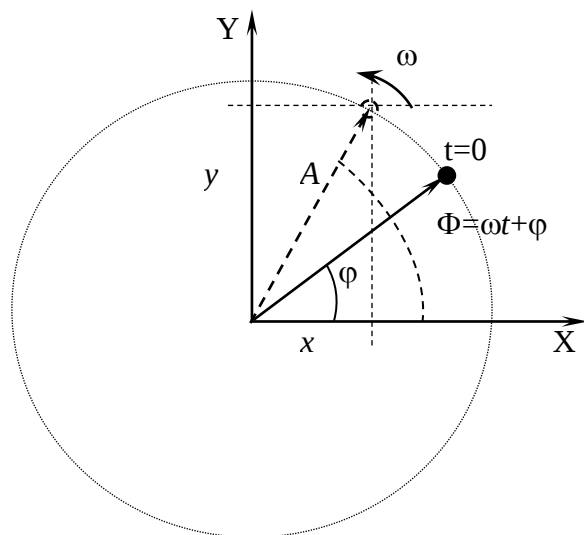
Движение по окръжност – гледни точки ...

В много случаи е по-удобно да използваме т.нар. векторно представяне на едно хармонично трептене. Нека да разгледаме равномерно движение, с ъглова скорост ω , на материална точка по окръжност с радиус A (фиг. 1). Началната ъглова координата на точката (ъгълът спрямо оста X в момента $t=0$) е φ . За някакъв интервал от време t , материалната точка ще се завърти на ъгъл $\Delta\varphi = \omega t$ и ъгловата ѝ координата ще стане $\Phi = \Delta\varphi + \varphi = \omega t + \varphi$. Ако построим радиус-вектора от началото на координатната система до точката виждаме, че той се върти около началото на координатната система със същата ъглова скорост ω както материалната точка, а големината му е равна на радиуса на окръжността A . Проекции на този радиус-вектор върху координатните оси X и Y във всеки момент от време t са:

$$x = A \cos \Phi = A \cos(\omega t + \varphi) \text{ и}$$

$$y = A \sin \Phi = A \sin(\omega t + \varphi),$$

т.е. те имат същия вид, както уравнението на движение на хармонично трептене. Следователно можем да представим хармоничното трептене чрез проекцията на радиус-вектор (с големина, равна на амплитудата A на трептенето), с начало в равновесното положение на трептящата точка, въртящ се с ъглова скорост ω , равна на кръговата честота на трептенето и начална ъглова координата φ , равна на началната фаза на трептенето. Това векторно представяне е много удобно, особено при събиране на трептения с еднакво направление.



фиг. 1

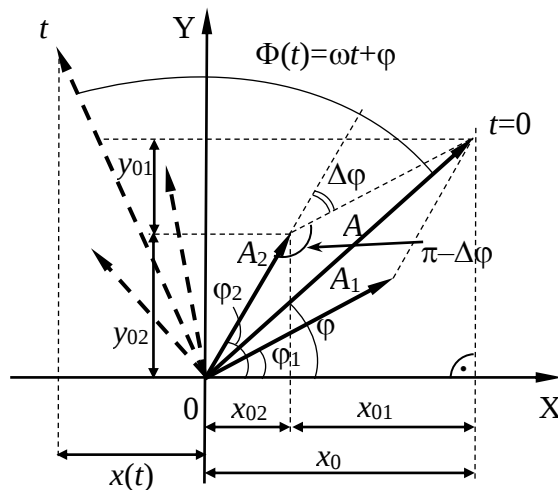
Събиране на хармонични трептения с еднакво направление

Дотук разгледахме най-простия вид трептене – хармонично трептене предизвикано от една възвръщаща сила. В много случаи на трептящото тяло могат да действат няколко сили. Като имаме предвид принципа на суперпозицията, можем да разглеждаме действието на тези сили независимо една от друга и да получим равнодействащата като векторна сума на всички действащи сили. По същия начин можем да постъпим и с резултата от действието на силите – в случая това са независими трептения, в които участва тялото под действие на тези сили. Като имаме предвид векторното представяне на хармоничното трептене, можем да приложим принципа на суперпозицията и за тях, т.е. резултантното трептене ще получим като векторна сума от векторите на отделните трептения.

Ще разгледаме първо най-простият случай – тяло (материална точка) участва в две трептения с еднаква кръгова честота ω (а следователно и с еднаква честота и период) в едно направление – по избраната ос X :

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \text{ и}$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2).$$



фиг. 2

Топче между две пружини ...

Ще използваме векторното представяне на трептенията – в този случай (фиг. 2) двата радиус-вектора, чиито проекции по оста **X** изобразяват трептенията, имат различни дължини (равни на амплитудите на двете трептения **A₁** и **A₂**) и различно положение спрямо оста **X** в началния момент (началните фази на трептенията **φ₁** и **φ₂**). Тъй като двата вектора се въртят с еднаква ъглова скорост **ω**, ъгълът между тях, който е равен на фазовата разлика **ΔΦ=Φ₂–Φ₁** между трептенията остава постоянен:

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = (\omega t + \varphi_2) - (\omega t + \varphi_1) = \varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi = \text{const},$$

т.е. фазовата разлика между трептенията във всеки момент от време е равна на фазовата разлика между тях в началния момент.

Радиус-векторът на резултантното трептене (сумата от двете трептения) ще получим като векторна сума на радиус-векторите на двете трептения, а неговата проекция върху оста **X** ще ни даде уравнението на движение на трептенето:

$$(1) \ x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega t + \varphi).$$

Тъй като ъгловата скорост на въртене на двата вектора е еднаква, ъгловата скорост на тяхната сума (кръговата честота на резултантното трептене) също ще бъде **ω**. Следователно, за да намерим уравнението на резултантното трептене, трябва да определим само амплитудата **A** и началната фаза **φ**. От фиг. 2 се вижда, че амплитудата **A** (от правилото за събиране на вектори) е:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos(\pi - \Delta\varphi)} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi},$$

а за началната фаза **φ** ще получим:

$$\tan \varphi = \frac{y_{01} + y_{02}}{x_{01} + x_{02}} = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.$$

$$\varphi = \arctan \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.$$

Така уравнението на движение (1) придобива вида:

$$x = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi} \cos \left(\omega t + \arctan \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \right).$$

Следователно, когато събираме хармонични трептения с еднакви честоти в едно направление, резултантното трептене също е хармонично трептене, със същата честота, а амплитудата и началната му фаза зависят от амплитудите и началните фази на всички трептения. Векторното представяне на хармоничните трептения ни позволява да събираме и повече трептения в едно направление – прибавяме ги последователно, както процедираме с векторите. Резултантното трептене винаги е в същото направление, както съставлящите го.

Биене

Ако двете трептения не са с еднакви честоти, но двете честоти са много близки, **ω₁≈ω₂=ω**, се наблюдава едно интересно явление с голямо приложение – биене. Ще разгледаме най-простият случай на биене, когато двете трептения имат еднакви амплитуди **A**, началните им фази са равни на **0** и се извършват в еднакво направление. Уравненията на движение на двете трептения в този случай са:

$$x_1 = A \cos \omega_1 t$$

$$x_2 = A \cos \omega_2 t$$

и за резултантното трептене ще получим:

$$x = x_1 + x_2 = A \cos \omega_1 t + A \cos \omega_2 t = 2A \cos \frac{(\omega_2 - \omega_1)}{2} t \cos \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2} t = \left(2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right) \cos \omega t.$$

Тъй като $\frac{\Delta\omega}{2} \ll \omega$, изразът в скобите се променя много по-бавно от $\cos \omega t$ и можем да го считаме за

променлива амплитуда на хармонично трептене с кръгова честота **ω**. От друга страна този израз може да бъде отрицателен при определени стойности на **t**, т.е. не може да бъде амплитуда на трептене, тъй като амплитудата е винаги положителна величина. Тогава можем да разглеждаме абсолютната стойност на израза като променлива амплитуда **A**:

$$(2) \ A = \left| 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right|$$

и уравнението на движение ще придобие вида:

$$(3) x = A \cos \omega t.$$

Графиките на уравнението на движение (3) и амплитудата $\tilde{A}$ (2) са показани на фиг. 3. Вижда се (фиг. 3б), че периодът на променливата амплитуда (2) е два пъти по-малък (съответно честотата е два пъти по-голяма) отколкото периодът T на хармоничното трептене $2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t$ (фиг. 3а), т.е. периодът на биене

T_b (периодът на променливата амплитуда) ще бъде:

$$T_b = \frac{1}{2} T = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{2\pi}{\Delta\omega},$$

а честотата на биене:

$$f_b = \frac{1}{T_b} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi} = f_2 - f_1.$$

Явлението биене намира широко приложение в практиката когато е необходима фина настройка на дадена честота, напр. при настройване на музикални инструменти.

Събиране на хармонични трептения в две взаимно перпендикулярни направления

Ако трептенията, в които участва материалната точка, са във взаимно перпендикулярни направления, движението ѝ в общия случай не е хармонично трептене. Материалната точка се движи по някаква криволинейна траектория, в зависимост от честотите, амплитудите и началните фази на двете трептения.

Две перпендикулярни пружини ...

Получените траектории при различни съотношения на честотите на двете трептения се наричат фигури на Лисажу. В този случай е по-лесно вместо да използваме векторни диаграми да определим уравнението на траекторията на движение. Ние ще разгледаме пак най-простият случай – когато честотите на двете трептения са равни. Нека уравненията на движение на двете трептения са:

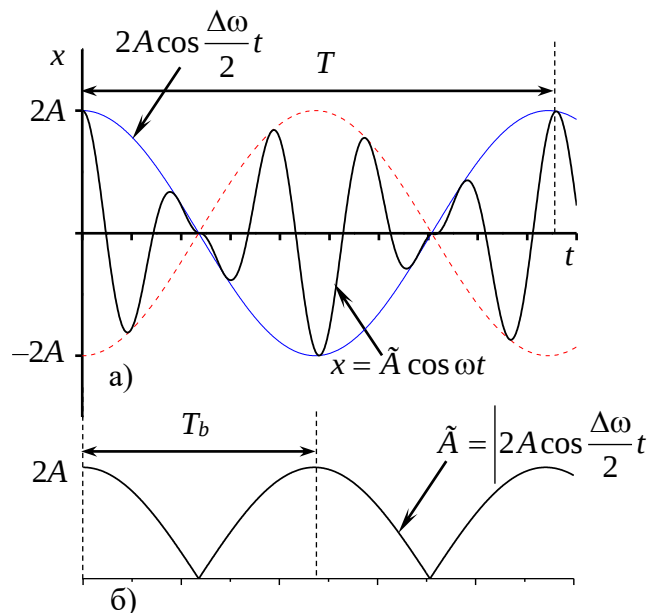
$$(4) \begin{cases} x = A \cos \omega t \\ y = B \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

Това е параметричното уравнение на кривата в равнината XY . За да получим зависимостта $y(x)$ в явен вид, трябва да изключим времето t от двете уравнения (4):

$$\left. \begin{aligned} \cos \omega t &= \frac{x}{A} \\ \sin \omega t &= \sqrt{1 - \cos^2 \omega t} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \\ \cos(\omega t + \varphi) &= \cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi = \frac{y}{B} \end{aligned} \right\} \frac{x}{A} \cos \varphi - \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \sin \varphi = \frac{y}{B}.$$

$$\begin{aligned} \frac{y}{B} - \frac{x}{A} \cos \varphi &= -\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}} \sin \varphi \\ \left(\frac{y}{B}\right)^2 - 2 \frac{y}{B} \frac{x}{A} \cos \varphi + \left(\frac{x}{A}\right)^2 \cos^2 \varphi &= \sin^2 \varphi - \left(\frac{x}{A}\right)^2 \sin^2 \varphi \\ (5) \left(\frac{y}{B}\right)^2 - 2 \frac{y}{B} \frac{x}{A} \cos \varphi + \left(\frac{x}{A}\right)^2 &= \sin^2 \varphi \end{aligned}$$

Това е уравнение на елипса, чиято голяма полуос сключва някакъв ъгъл с оста X . Следователно траекторията на движение на материалната точка е елипса, параметрите на която зависят от разликата φ в началните фази на двете трептения и техните амплитуди.



фиг. 3

Частни случаи. Фигури на Лисажу

Ще разгледаме няколко частни случая.

1. Разликата в началните фази на двете трептения $\varphi=0$ (фиг. 4а). В този случай (5) ще бъде:

$$\left(\frac{y}{B}\right)^2 - 2\frac{y}{B}\frac{x}{A} + \left(\frac{x}{A}\right)^2 = 0$$

$$\frac{y}{B} - \frac{x}{A} = 0$$

$$y = \frac{B}{A}x$$

Това е уравнение на права в I и III квадрант, която минава през началото на координатната система и сключва ъгъл $\arctan \frac{B}{A}$ с оста X . Това е хармонично трептене по тази права с амплитуда $\sqrt{A^2 + B^2}$ с

уравнение:

$$r = \sqrt{A^2 + B^2} \cos \omega t.$$

2. Разликата в началните фази на двете трептения $\varphi=\pi$ (фиг. 4е). Този случай се отличава от предишния само по положението на правата – тя ще бъде във II и IV квадрант:

$$\left(\frac{y}{B}\right)^2 + 2\frac{y}{B}\frac{x}{A} + \left(\frac{x}{A}\right)^2 = 0$$

$$\frac{y}{B} + \frac{x}{A} = 0$$

$$y = -\frac{B}{A}x$$

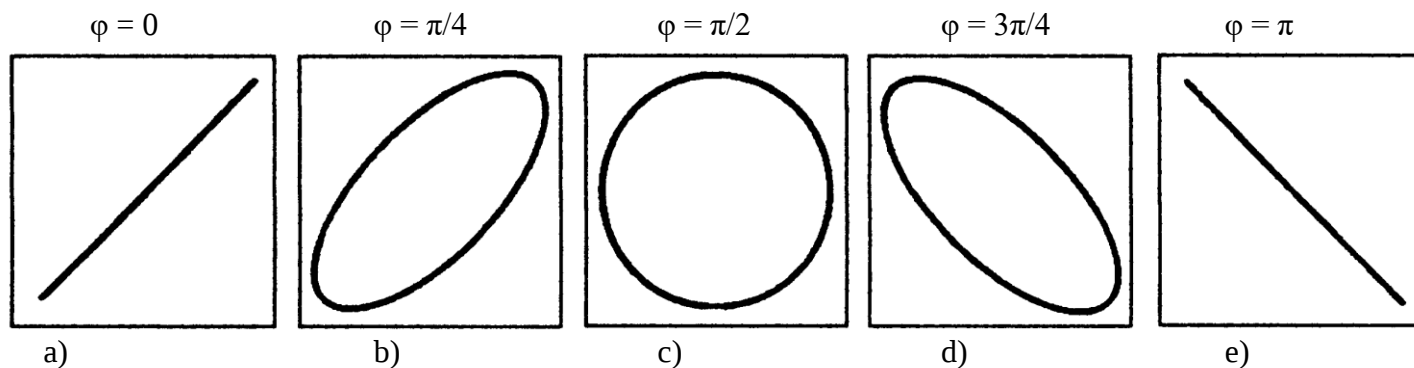
Уравнението на движение ще има същия вид, но началното положение ще бъде друго.

3. Разликата в началните фази на двете трептения $\varphi=\pm\pi/2$ (фиг. 4с). От (5) следва, че движението ще бъде по елипса, чиито главни оси съвпадат с координатните оси:

$$\left(\frac{y}{B}\right)^2 + \left(\frac{x}{A}\right)^2 = 1.$$

Двата случая се различават само по посоката на движение на точката по елипсата – при $\varphi = \pi/2$ движението е по часовниковата стрелка, а при $\varphi = -\pi/2$ е в обратна посока. Ако амплитудите на двете трептения са равни, $A=B=R$, резултантното движение ще бъде по окръжност с радиус R .

При плавна промяна на фазовата разлика от 0 до 2π (фиг. 4), траекторията се променя и преминава от права в I и III квадрант през наклонена елипса, елипса по координатните оси, права в II и IV квадрант пак наклонена елипса и т.н. до права в I и III квадрант при $\varphi=2\pi$.



фиг. 4

Случаят, който разгледахме (при равни кръгови честоти на двете трептения), е най-простият случай на фигурите на Лисажу, които се получават при наслаждане на взаимно перпендикулярни трептения. В общия случай фигурите на Лисажу са криви, които са решение на системата параметрични уравнения:

$$x = A \cos \omega_1 t$$

$$y = B \cos(\omega_2 t + \varphi)$$

при различни съотношения на кръговите честоти ω_1/ω_2 .

Когато съотношението на честотите е рационално число, напр. 1:2, 3:2, 3:4 и т.н. се получават по-сложни затворени криви, които също могат да се наблюдават на осцилоскоп.

Фигури на Лисажу (видео) ... https://youtu.be/CMh_TlQCdWI, <https://youtu.be/hUu653khUIE>

Затихващи трептения

В реалните трептящи системи винаги действат някакви сили на триене и съпротивление на средата. Това води до постепенно намаляване на механичната енергия на трептящата материална точка, а следователно и до намаляване на амплитудата на трептенията с течение на времето. В зависимост от силите на съпротивление, след определено време трептенето се прекратява.

Люлка, ластично въже, махало на часовник, пружина с тежест (видео) ... <https://youtu.be/sP1DzhT8Vzo>

Трептения, чиято амплитуда намалява с течение на времето се наричат затихващи трептения. Тези трептения не са истински периодични движения, защото трептящото тяло не преминава през равни интервали от време през еднакви състояния (максималното отклонение всеки път е по-малко от предходния), но уравнението им на движение е сходно с това на хармоничните трептения и можем условно да ги наричаме периодични, ако коефициентът на триене (или съпротивление) на средата е постоянен. Видяхме, че уравнението на движение е решение на диференциалното уравнение на трептенето, т.е. първо ще трябва да получим диференциалното уравнение на затихващото трептене. Ще го получим отново от втория принцип на Нютон, като пак разглеждаме пружинно махало. В този случай освен възвръщащата сила $F = -kx$, на тялото действа и сила на съпротивление, която е насочена обратно на посоката на движение и при малки скорости зависи линейно от скоростта – $F_s = -rv$ (r е коефициентът на триене (съпротивление) на средата и предполагаме, че е постоянен). Като използваме принципа на суперпозицията, за ускорението ще получим:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n F_i}{m} = -\frac{k}{m}x - \frac{r}{m}v$$

и като отчетем, че скоростта е първа производна, а ускорението – втора производна на координатата x по времето, ще получим диференциалното уравнение на затихващото трептене:

$$(6) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0,$$

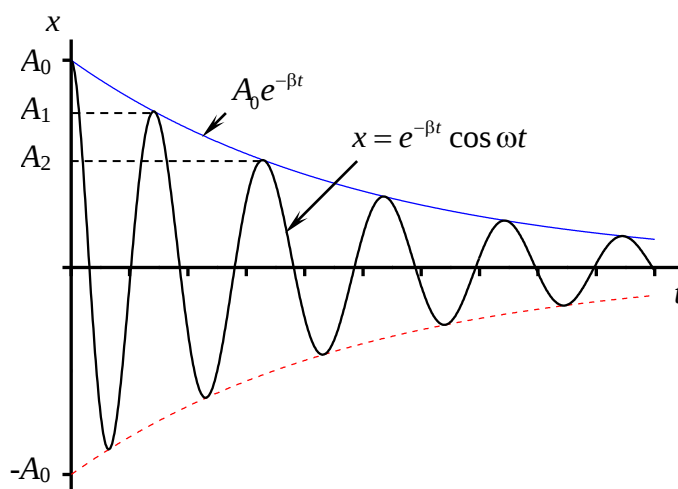
като в (6) сме положили отношението $\frac{r}{m} = 2\beta$, β

се нарича коефициент на затихване, а $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ е

т.нар. собствена кръгова честота на трептенето (кръговата честота на хармоничното трептене, ако няма сила на триене) – това е същата кръгова честота, която получихме за хармонично трептене. Виждаме, че (6) също е линейно хомогенно уравнение от втори ред. Решенията му са:

$$(7) \quad \begin{aligned} x &= A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) \\ x &= A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

и също зависят от две произволни константи – A_0 и φ , които се определят от началните условия. Виждаме, че видът на (7) е същият, както на уравнението на движение на хармоничното трептене, ако приемем величината $A = A_0 e^{-\beta t}$ за променлива амплитуда на трептенето. Тъй като $e^{-\beta t}$ е намаляваща функция, амплитудата при всяко преминаване през положението на максимално отклонение с течение на времето ще бъде все по-малка от началната си стойност A_0 . Зависимостта (7) е уравнението на движение на затихващо трептене. Графиката на уравнението на движение на затихващо трептене (7) е представена на фиг. 5.



фиг. 5

Основните характеристики на едно затихващо трептене вече са четири – освен началната амплитуда A_0 , началната фаза φ и кръговата честота ω , трябва да знаем и коефициентът на затихване β . Началната амплитуда A_0 и началната фаза φ , също както и при хармоничните трептения, зависят от началните условия, а коефициентът на затихване β – от коефициентът на триене r и масата на тялото m . Кръговата честота на затихващите трептения ω , за разлика от хармоничните трептения, вече не е характеристика само на трептящата система, а зависи и от средата чрез коефициентът на затихване β . Стойността ѝ може да се получи като заместим x от (7) (и производните му) в (6) и решим полученото уравнение:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

и виждаме, че ω е по-малка от собствената честота ω_0 .

Ще дефинираме и период T на затихващите трептения като времето между две преминавания през равновесното положение:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Виждаме, че T е по-голям от периода на незатихващите трептения $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$, но ако $\beta \ll \omega_0$, почти не се отличава от него.

Отношението на две съседни амплитуди (амплитудите при две последователни преминавания през максималното отклонение (фиг. 1), времето между тях се различава с един период T) е постоянна величина, която зависи само от коефициента на затихване β и периодът T :

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_0}{A_0 e^{-\beta T}} = e^{\beta T}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_0 e^{-\beta T}}{A_0 e^{-2\beta T}} = e^{\beta T}$$

и се нарича декремент на затихване. Натуралният логаритъм от декремента на затихване се нарича логаритмичен декремент на затихване:

$$\delta = \ln e^{\beta T} = \beta T$$

и също е една от основните характеристики на реалните (затихващи) трептящи системи.

Принудени трептения

Едно затихващо трептене може да се превърне в незатихващо, ако предаваме на системата енергия отвън, която да компенсира загубите вследствие триенето и съпротивлението на средата. Такова трептене се нарича принудено трептене. Тази енергия се предава чрез извършване на работа от някаква външна сила.

Електромотор, ДВГ, часовник ...

Тъй като работата може да бъде положителна или отрицателна в зависимост от посоката на силата и преместването, ако се опитаме да предадем енергия в неподходящ момент (силата действа в посока, обратна на преместването на трептящото тяло в дадения момент), може да постигнем обратен ефект – вместо да предадем, да отнемем енергия от системата. Следователно не можем да предизвикаме принудени трептения с постоянна сила – тя действа винаги в една посока и през част от времето ще отнема енергия от системата. **Принудено трептене се осъществява, когато на една трептяща система действа периодична сила** напр. $F \cos \omega t$. Под действие на тази периодична сила системата ще започне да трепти със същата честота, с която се променя силата (след първоначален период на „синхронизация“), тъй като така ще приема енергията в подходящия момент. Диференциалното уравнение ще получим от втория принцип на Нютон, като отчетем и действието на външната периодична сила:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n F_i}{m} = -\frac{k}{m}x - \frac{r}{m}v + \frac{F}{m} \cos \omega t,$$

$$(8) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f \cos \omega t.$$

Означили сме отношението $\frac{F}{m} = f$ за опростяване на записа на уравнението. Това е нехомогенно диференциално уравнение и решението му се получава като сума от общото решение x_0 на хомогенното уравнение (6) и едно частно решение x_1 на (8). Ние знаем общото решение на (6) – това са функции от вида (7). Можем да си изберем за x_0 напр.:

$$(9) x_0 = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \varphi'),$$

като с $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ и φ' сме означили кръговата честота и началната фаза на затихващото трептене, тъй като те може да се различават от кръговата честота ω и началната фаза φ на принуденото трептене.

Остава да намерим едно частно решение на (8), т.е. решение, което не съдържа произволни константи. Ще го търсим във вида:

$$(10) x_1 = A \cos(\omega t - \varphi).$$

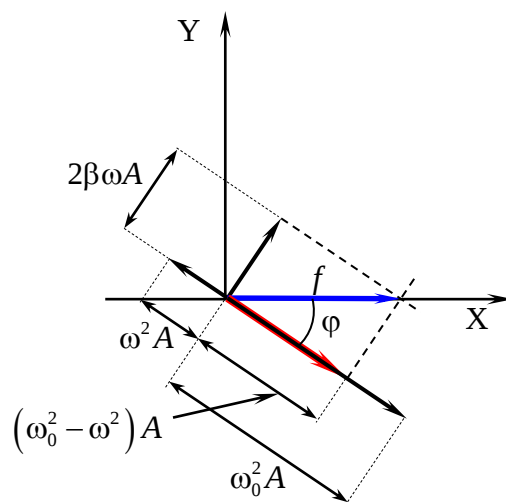
Трябва да намерим такива стойности на A и φ , при които се удовлетворява (8). Ще постъпим както при определянето на кръговата честота на затихващите трептения – ще заместим x и производните му в (8) и ще се опитаме да решим полученото уравнение:

$$\frac{dx_1}{dt} = -\omega A \sin(\omega t - \varphi) = \omega A \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t - \varphi) = \omega^2 A \cos(\omega t - \varphi + \pi)$$

$$(11) \omega^2 A \cos(\omega t - \varphi + \pi) + 2\beta \omega A \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + \omega_0^2 A \cos(\omega t - \varphi) = f \cos \omega t.$$

Полученото уравнение (11) има вид на сума от хармонични трептения в едно направление. Затова е най-лесно да бъдат определени A и φ от него чрез векторна диаграма (фиг. 6). Третият член на сумата има амплитуда $\omega_0^2 A$ и начална фаза $-\varphi$, следователно векторът сключва ъгъл φ с оста X по посока на часовниковата стрелка. Вторият член на сумата е отместен от третия на ъгъл $(+\pi/2)$ и има амплитуда $2\beta \omega A$, а първият е отместен спрямо третия на ъгъл $(+\pi)$ и има амплитуда $\omega^2 A$. Сумата от трите вектора трябва да дава векторът от дясната страна на (11) с амплитуда f и начална фаза 0 . От векторната диаграма (фиг. 6) следва:



фиг. 6

$$f^2 = \frac{F^2}{m^2} = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 A^2 + 4\beta^2 \omega^2 A^2$$

$$(12) A = \frac{F}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}},$$

а за ъгъла φ получаваме:

$$\tan \varphi = \frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$(13) \varphi = \arctan \frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

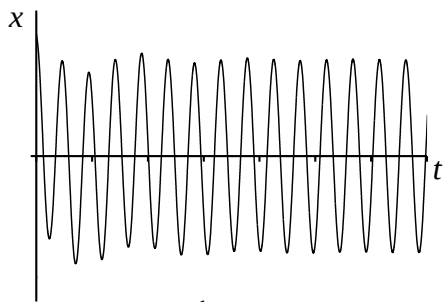
Така, като заместим (12) и (13) в (10), частното решение придобива вида:

$$(14) x_1 = \frac{F}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \cos\left(\omega t - \arctan \frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right),$$

а общото решение на (8), т.е. уравнението на движение на принуденото трептене, ще получим от сумата на (9) и (14):

$$(15) x = x_0 + x_1 = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \varphi') + \frac{F}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \cos\left(\omega t - \arctan \frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right).$$

Трябва да отбележим, че първият член на (15) намалява много бързо (времето за „синхронизация“), след което само вторият член оказва влияние, т.е. на практика принуденото трептене от даден момент нататък е хармонично трептене с кръгова честота равна на кръговата честота ω на външната сила и амплитуда (12) (фиг. 7).



фиг. 7

Резонанс

Виждаме (12), че амплитудата на принуденото трептене зависи освен от големината на външната сила (нейната амплитуда F) и от честотата ω на външната сила. Това означава, че при една и съща амплитуда F на външната сила, при определена честота е възможно увеличаване на амплитудата (12) на принуденото трептене.

Резонанс (видео) ... <https://youtu.be/XggxeuFDaDU>, <https://youtu.be/ux27Dovb9Fs>, войници по мост (Англия, Франция), ледени магистрала (Естония)

Тази честота, при която системата най-лесно откликва на външно въздействие, се нарича резонансна честота ω_r , а **явлението, при което амплитудата на принуденото трептене се увеличава многократно при определена честота (в идеалния случай, при отсъствие на съпротивление на средата – до безкрайност), се нарича резонанс.** Резонансната честота ω_r можем да намерим като определим максимума на амплитудата (12), чиято графика за различни стойности на β е показана на фиг. 8, в зависимост от честотата ω , т.е. минимума на величината под корена в знаменателя. Трябва да определим първата производна на тази величина по ω и да я приравним на 0:

$$-4(\omega_0^2 - \omega^2 - 2\beta^2)\omega = 0.$$

Това уравнение има три корена: $\omega = 0; \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$.

Първият отговаря на максимум (може да се провери чрез втората производна) на подкоренната величина и следователно минимум на амплитудата, а отрицателният корен няма физически смисъл. Така за резонансната честота на принуденото трептене получаваме:

$$(16) \quad \omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2},$$

а за стойността на амплитудата A_r при резонанс, като заместим (16) в (12):

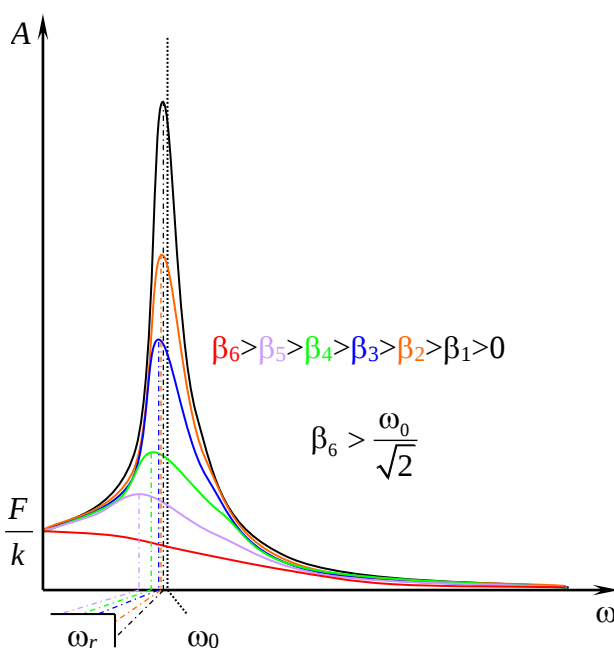
$$(17) \quad A_r = \frac{F}{2\beta m \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

От (16) следва, че резонансната честота ω_r е винаги по-малка от собствената честота ω_0 на трептенето и намалява с увеличаване на коефициента на затихване β (фиг. 8). Ако коефициентът на затихване е много голям

($\beta > \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$, β_6 на фиг. 8), изразът (16) става имагинерен,

т.е. резонанс няма да се наблюдава при никаква реална честота (няма максимум на резонансната крива). Същото е валидно и за (17) – амплитудата при резонанс е толкова по-голяма, колкото е по-малко β (фиг. 8) и при $\beta > \omega_0$ става имагинерна, т.е. изобщо няма трептене – когато отклоним системата от равновесното ѝ положение тя плавно се връща към него. От (16) и (17) се вижда също, че в идеалния случай ($\beta=0$) резонансната честота ω_r е равна на собствената честота на системата, а резонансната амплитуда A_r клони към безкрайност.

Представените на фиг. 8 резонансни криви на амплитудата A на принуденото трептене (12) от честотата ω на външната сила потвърждават изводите, които направихме при анализа на (16) и (17). Виждаме, че колкото е по-малко β , толкова по-висок и по-остър е максимумът (резонансната амплитуда), а положението му ω_r по оста ω (резонансната честота) се измества по-надясно и се доближава до собствената честота на трептенето ω_0 . От фиг. 8 можем да направим още няколко извода.



фиг. 8

Когато честотата $\omega \rightarrow 0$, всички резонансни криви клонят към една и съща стойност – $\frac{F}{m\omega_0^2} = \frac{F}{k}$ (12) –

това е отклонението, което получава системата при постоянна сила (когато $\omega=0$ силата $F\cos\omega t$ не зависи от времето t и не може да предизвика принудено трептене). Когато честотата $\omega \rightarrow \infty$, всички резонансни криви асимптотично клонят към нула (12) – силата се променя толкова бързо, че системата няма време да реагира на въздействието.

Явлението резонанс (при механични, електромагнитни и др. трептения) намира много широко приложение в техниката и практиката напр. при настройване на радиоприемник или телевизор на определена честота.