

Топлинно излъчване. Абсолютно черно тяло. Закони на Кирхоф, Стефан – Болцман и Вин. Формула на Планк. Външен фотоелектричен ефект. Закони при фотоефекта.

Уравнение на Айнщайн и квантово обяснение на законите. Енергия и импулс на фотона. Корпускулярно-вълнови свойства на микрочастиците. Вълни на дьо Бройл.

Експериментално потвърждение. Съотношения за неопределеност на Хайзенберг.

Вълнова функция. Общо и стационарно уравнение на Шрьодингер

Топлинно излъчване. Абсолютно черно тяло. Закон на Кирхоф

Всички тела, нагрети до висока температура, излъчват видима светлина. Например при нагриване на парче желязо до температура 700°C то започва да излъчва червена светлина. С повишаване на температурата цветът на излъчването се променя. При 1000°C цветът става жълт, а при 1500°C – виолетово-бял. Очевидно с нарастване на температурата максимумът на излъчването се измества към по-малките дължини на вълните. При по-ниски температури телата също излъчват електромагнитни вълни, но те не се възприемат от човешкото око, тъй като са извън видимия диапазон ($400 < \lambda < 750 \text{ nm}$). Излъчването на електромагнитни вълни от телата, нагрети до някаква температура, по-висока от абсолютната нула, се нарича топлинно (температурно) излъчване. Опитът показва, че едновременно с излъчването телата също и поглъщат попадналите върху тях електромагнитни вълни. Ако температурата на едно тяло е по-висока от тази на околната среда, то главно излъчва, и обратно – ако температурата му е по-ниска – поглъща. (Това е така, защото основното състояние на телата е топлинното равновесие.) Топлинното излъчване е най-разпространеното в природата. То е универсално явление и се дължи на топлинното движение на атомите и молекулите във веществата. Телата излъчват електромагнитни вълни вследствие преобразуване енергията на хаотичното топлинно движение на частиците им в енергия на излъчване (лъчиста енергия).

Като количествена характеристика на топлинното излъчване се въвежда физичната величина интегрална излъчвателна (емисионна) способност. Тя се определя числено от енергията на топлинното излъчване, която се излъчва от единица повърхност на дадено тяло, нагрят до някаква термодинамична температура T , за единица време. Означава се с E_T или W_e :

$$E_T \equiv W_e = \frac{E}{St}.$$

Мерната единица за излъчвателна способност е W/m^2 . В процеса на излъчване тялото непрекъснато губи част от енергията си, поради което температурата му се понижава. За да се поддържа процесът на излъчване при постоянна температура, тялото трябва и да поглъща енергия. Такъв процес на топлинно излъчване, при който източникът на електромагнитно лъчение се намира в състояние на термодинамично равновесие ($T = \text{const}$), се нарича равновесно топлинно излъчване. Всяко тяло при термодинамично равновесие излъчва толкова електромагнитна енергия, колкото и поглъща.

По-често, когато се говори за излъчвателна способност на дадено тяло, се има предвид т.нар. спектрална излъчвателна способност $E_{\lambda,T}$ – енергията, която се излъчва от единица повърхност на дадено тяло за единица време при температура T , за определена дължина на вълната λ (на практика за много малък интервал от дължини на вълните $d\lambda$):

$$E_{\lambda,T} = \frac{dW_e}{d\lambda}.$$

Както казахме, всички тела, освен да излъчват, притежават способност и да поглъщат попадналото върху тях електромагнитно лъчение. Това тяхно свойство се характеризира от друга физична величина, наречена спектрална поглъщателна (абсорбционна) способност. Тя се определя от отношението на погълнатата dW_a към падналата dW_t електромагнитна енергия за единица време върху единица повърхност от тялото при дадена температура T и определена дължина на вълната λ . Означава се с $A_{\lambda,T}$:

$$A_{\lambda,T} = \frac{dW_a}{dW_t}.$$

Очевидно е, че поглъщателната способност е безразмерна величина и показва каква част от падналото електромагнитно лъчение с определена дължина на вълната върху единична повърхност от дадено тяло се поглъща от него за единица време. Освен от температурата и дължината на вълната двете величини $E_{\lambda,T}$ и $A_{\lambda,T}$ зависят още от материала и вида на повърхността на тялото. По-нататък, когато говорим за поглъщателна и излъчвателна способност на тяло, ще имаме предвид спектралните излъчвателна и поглъщателна способност.

Първата количествена зависимост между поглъщателната и излъчвателната способност на дадено непрозрачно тяло е установена от немския физик Г. Кирхоф. **Законът на Кирхоф гласи, че отношението между излъчвателната и поглъщателната способност на дадено тяло е равно на една универсална функция на дължината на вълната и температурата на тялото, която е еднаква за всички тела и не зависи от тяхното естество:**

$$(1) \frac{E_{\lambda,T}}{A_{\lambda,T}} = f(\lambda, T)$$

Бутилка с вода (посребрена и черна) ...

От горното равенство следва, че колкото по-силно поглъща едно тяло даден вид лъчение с определена дължина на вълната λ , толкова по-силно ще излъчва то същия вид лъчение (при една и съща температура). Законът на Кирхоф е в съгласие с условието за температурно равновесие на телата. За да се поддържа температурата на едно тяло постоянна, то трябва да излъчва толкова енергия, колкото и поглъща. В противен случай неговата температура ще се повиши или понижи и равновесието му ще бъде нарушено. Най-подходящи за източници на топлинно излъчване са **телата, които изцяло поглъщат падналите върху тях електромагнитни вълни независимо от λ и T . Те се характеризират с поглъщателна способност $A_{\lambda,T}=1$ и се наричат абсолютно черни тела.** Следователно (1) тяхната излъчвателна способност е точно тази универсална функция $f(\lambda, T)$. Такова тяло също е физичен модел, както материална точка или идеален газ, тъй като такива тела в природата не съществуват, но има много обекти (напр. звездите), които се доближават до този модел. Всички тела, които могат да се приемат за абсолютно черни, поглъщат еднакъв спектър от дължини на вълните, зависещ само от температурата, но не и от състава и повърхността им. Абсолютно черните тела поглъщат електромагнитните вълни с всички възможни дължини, които попадат върху тях (и, в съответствие със закона на Кирхоф, също така излъчват в целия електромагнитен спектър).

От закона на Кирхоф следва още, че ако едно тяло не поглъща електромагнитни вълни с определена дължина λ при дадена температура ($A_{\lambda,T}=0$), то няма и да ги излъчва ($E_{\lambda,T}=0$). Законът на Кирхоф позволява при известна за дадено тяло поглъщателна способност $A_{\lambda,T}$ да се изрази неговата излъчвателна способност чрез тази на абсолютно черното тяло $f(\lambda, T)$. Ето защо се оказало много важно да се намери тази универсална функция.

Закони на Стефан – Болцман и Вин. Формула на Планк

Решаването на тази задача се оказало не толкова лесно и било проведено на няколко етапа. Първоначално на основата на експерименти, направени от австрийския физик Й. Стефан, е определена интегралната излъчвателната способност E_T на абсолютно черно тяло като функция от температурата му. По-късно от австрийския физик Л. Болцман е изведен теоретично израз, известен във физиката като закон на Стефан–Болцман:

$$(2) E_T = \sigma T^4,$$

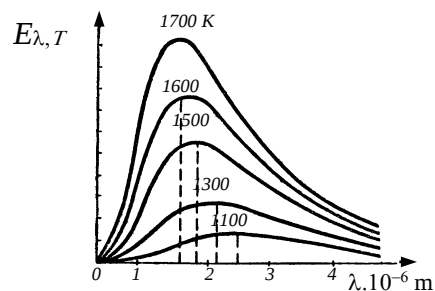
т.е. **интегралната излъчвателна способност на абсолютно черно тяло е пропорционална само на четвъртата степен на термодинамичната (абсолютната) температура на тялото**, където величината $\sigma=5.67 \times 10^{-8} \text{ W/(m}^2 \cdot \text{K}^4)$ се нарича константа на Стефан – Болцман. Законът на Стефан – Болцман показва извънредно бързо нарастване на излъчвателната способност на телата с температурата.

Следващият етап в определянето на универсалната функция бил извършен от немския физик В. Вин, който установил, че **дължината на вълната, съответстваща на максималната излъчвателна способност на абсолютно черно тяло е обратно пропорционална на термодинамичната (абсолютната) му температура:**

$$(3) \lambda_{\max} = \frac{b}{T},$$

където b е постоянна величина, наречена константа на Вин; $b=2.9 \times 10^{-3} \text{ m.K}$. Законът на Вин обяснява защо при понижаване температурата на нагретите тела в спектъра на излъчването им се появяват дългите вълни.

Промяна на цвета при нагриване, звезди ...



фиг. 1

На фиг. 1 са показани кривите на спектралната излъчвателна способност на абсолютно черно тяло при няколко различни температури. Те са илюстрация на законите на Стефан – Болцман (2) и Вин (3). Законът на Стефан–Болцман ни дава интегралната излъчвателна способност, т.е. това е площта под кривата на $E_{\lambda,T}$ ($E_T = \int_0^{\infty} E_{\lambda,T} d\lambda$) – вижда се, че с повишаване на температурата тази площ расте бързо. От

тях също се вижда, че при повишаване на температурата максимумът на излъчването се отмества към по-малките дължини на вълните. От гледна точка на класическата физика видът на тези криви не може да бъде обяснен (наляво от максимума, както и самото съществуване на максимум на излъчването при определена дължина на вълната). Абсолютно черното тяло представлява идеалният излъчвател и се състои от огромен брой атоми, всеки от които излъчва електромагнитни вълни. Тъй като атомите излъчват вълни с различна дължина, сумарното електромагнитно излъчване от цялото тяло е с всевъзможни дължини на вълните. С това може да се обясни непрекъснатият спектър на електромагнитното излъчване, но не и неговото отместване с нарастване на температурата, както и формата на кривите при малки дължини на вълните (т.нар. ултравиолетова катастрофа). За тяхното обяснение М. Планк предложил формула, известна като формула на Планк, определяща функционалната зависимост на излъчвателната способност от λ и T :

$$(4) E_{\lambda,T} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 (e^{hc/\lambda kT} - 1)},$$

където c е скоростта на светлината, h – константата на Планк, λ – дължината на вълната на излъчването, k – константата на Болцман, а T – термодинамичната температура на излъчващото абсолютно черно тяло. Възникналите трудности в теорията на топлинното излъчване на абсолютно черното тяло били свързани с едно от основните положения в класическата физика, според което енергията на всяко тяло (или система) може да се изменя непрекъснато и да заема всякакви стойности. За да обясни формула (4), Планк през 1900 г. изказва хипотезата, че излъчването на електромагнитно лъчение от атомите и молекулите на абсолютно черното тяло става не непрекъснато, а на определени порции, наречени кванти. Всеки излъчващ атом или молекула може да съществува в енергетични състояния, чиято енергия е кратна на енергията на един квант:

$$E_n = nhf,$$

където n е цяло число ($n=1, 2, 3, \dots$), а f – честотата на вълната на лъчението. Енергията на всеки отделен квант е правопрпорционална на честотата и обратнопрпорционална на дължината на вълната:

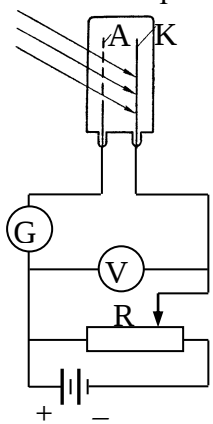
$$E = hf = h \frac{c}{\lambda}.$$

Защо спада до 0 ...

От формулата на Планк (4) могат да се изведат и експериментално получените закони на Стефан – Болцман (2) и Вин (3). По-нататъшното развитие на хипотезата на Планк довежда до създаването на квантовата теория за светлината.

Външен фотоелектричен ефект. Закони при фотоефекта

Явлението фотоелектричен ефект (фотоефект) е наблюдавано за пръв път от немския физик Херц, който експериментално установява и съществуването на електромагнитните вълни, предсказани от Максвел. Опитите на физиците да се обясни това явление чрез електромагнитната теория на Максвел не дават резултат. Отново възниква необходимостта от развиване на нови идеи във физиката, които да допълнят съществуващите представи за електромагнитните вълни. На основата на квантовата хипотеза на Планк Айнщайн развива квантовата теория на фотоефекта, с която блестящо обяснява това явление и получава Нобелова награда.



фиг. 2

Фотоелектричният ефект е процес на взаимодействие между светлината (електромагнитните вълни) и веществото, при който енергията на светлинните кванти (фотони) се предава на електроните на веществото. Съществуват два вида фотоелектричен ефект в твърдите тела: външен фотоефект, при който поглъщането на фотоните от веществото довежда до отделяне на електрони от повърхността му, и вътрешен фотоефект, при който се наблюдава увеличаване броя на свободните електрони в облъчваното вещество.

Руският физик А. Столетов изследва подробно външния фотоефект и опитно установява основните закони, на които се подчинява това явление. На фиг. 2 е показана опитна постановка, позволяваща да бъдат установени основните закономерности. Върху полирана метална пластинка **К**, наречена фотокатод, пада тесен монохроматичен сноп светлина с малка дължина на вълната λ ($\lambda = \text{const}$). Срещу катода се поставя метална мрежа **А**, изпълняваща ролята на анод. Съдът, в който се намират двата електрода, се вакуумира добре и се свързва в електрична верига с източник на електродвижещо напрежение, потенциометър **R**, волтметър **V** и галванометър **G**. При осветяване на катода **К** във веригата протича електричен ток, регистриран от галванометъра, дори и без да се подава напрежение от източника. Причината за появилия се електричен ток са електрони, които се отделят от повърхността на осветявания катод и се наричат фотоелектрони. Те достигат до анода и броят им (общият заряд, преминал за единица време) определя големината на тока (фототока). Когато във веригата се приложи ускоряващо напрежение $U > 0$, големината на фототока започва да расте и достига определена максимална стойност при някаква стойност на напрежението U . Този ток се нарича фототок на насищане и съответства на състоянието, когато всички отделени електрони достигат анода. При по-нататъшно увеличаване на напрежението фототокът остава постоянен. Ако увеличаваме интензитета на светлината при постоянна дължина на вълната λ , пропорционално се увеличава както големината на първоначалния фототок, така и на наситения фототок. Този факт показва, че с нарастване на интензитета се увеличава броят на отделените от повърхността на катода електрони. Столетов изследвал волт-амперните характеристики и при приложено обратно напрежение ($U < 0$). Неговата цел била да определи при каква стойност на напрежението фототокът във веригата ще стане равен на нула. При задаване отрицателни стойности на напрежението, електричната сила изпълнява ролята на задържаща (спираща) движението на електроните сила. В този случай електричните сили извършват отрицателна работа, която компенсира кинетичната енергия на електроните, движещи се към анода. Увеличавайки постепенно отрицателните стойности на U , се стига до някаква определена стойност, при която големината на фототока става равна на нула. Тази стойност на напрежението се нарича задържащо (спирачно) напрежение U_s . Работата на електричните сили в този момент компенсира кинетичната енергия на най-бързите електрони, като не им позволява да достигнат до анода. Следователно

$$T_{\max} = A_e$$

$$(5) \quad \frac{mv_{\max}^2}{2} = e\Delta\varphi = eU_s.$$

Горната формула показва, че измервайки стойността на приложеното задържащо напрежение във веригата, може да се определи максималната скорост на фотоелектроните (масата m и електричният заряд e на електроните са постоянни величини). Оказало се, че за различни стойности на интензитета максималната скорост, с която се отделят електроните от повърхността на катода, е една и съща ($U_s = \text{const}$). Това показва, че тази скорост не зависи от интензитета на лъчението. Столетов изследвал и зависимостта между максималната кинетична енергия на фотоелектроните и честотата (дължината на вълната, $f = c/\lambda$) на лъчението, с което се осветява катодът. При различни честоти във веригата били регистрирани различни стойности на първоначалния фототок, обусловен от електроните с максимална скорост. При някаква гранична честота f_0 стойността на фототока ставала нула, т.е. от повърхността на съответния метал на катода не се отделяли електрони. Тази честота f_0 , при която фотоефект не се наблюдава, е наречена червена граница на фотоефекта. Измерванията показали, че за различните метали граничната честота е различна (за повечето метали f_0 лежи в областта на ултравиолетовите лъчи). Чрез задаване на различни отрицателни стойности на напрежението бил установен фактът, че максималните скорости на отделените електрони в този случай са различни. На всяка честота съответствала определена стойност на задържащото напрежение, при която фототокът ставал равен на нула. От (5) били определени максималните кинетични енергии за различните честоти. Резултатът бил, че с намаляването на честотата намалява и кинетичната енергия на фотоелектроните. За честоти $f \leq f_0$ явлението фотоефект не се наблюдава, т.е. $T = 0$. При смяна на катода с друг метал се получава аналогичен резултат, но с друга червена граница f_0 .

Обобщавайки данните от направените изследвания, Столетов формулирал следните основни закони при външния фотоефект:

– При монохроматично лъчение, $(f, \lambda) = \text{const}$, броят на отделените електрони от повърхността на даден метал за единица време е пропорционален на интензитета на лъчението;

- Кинетичната енергия на отделените електрони зависи линейно от честотата f на лъчението и не зависи от неговия интензитет;
- За всеки метал съществува т.нар. червена граница на фотоэффекта f_0 (λ_0) – минимална честота (максимална дължина на вълната) – под (над) която явлението фотоэффект не се наблюдава. Тази граница зависи от химичното естество на метала, който се осветява.

Уравнение на Айнщайн и квантово обяснение на законите

Опитно установените закони на фотоэффекта не могли да бъдат обяснени с вълновите свойства на електромагнитните вълни. Енергията, която получават при осветяване електроните на метала, зависи от амплитудата на вектора $\vec{E}$ на вълната. Следователно при всяка честота (или дължина на вълната), ако лъчението има достатъчен интензитет, може да се очаква отделяне на електрони от метала и червена граница не би трябвало да има. Освен това кинетичната енергия на фотоелектроните би трябвало да зависи от интензитета на лъчите, тъй като с неговото увеличаване на електроните се предава по-голяма енергия.

Айнщайн предлага теория за обяснение на фотоэффекта, на базата на предложената по-рано от Планк квантова хипотеза за топлинното излъчване. Той предполага, че светлината не само се излъчва, но се и поглъща и разпространява във вид на кванти, наречени фотони. В такъв случай интензитетът на светлината може да се разглежда като брой фотони, попадащи върху единица площ за единица време. Енергията на всеки фотон се определя от формулата на Планк $E=hf$. Падащите върху повърхността на катода фотони взаимодействат с електроните на метала като частици с частици и им отдават енергията си. Всеки фотон се поглъща от един електрон и ако енергията му е равна или по-голяма от енергията на свързване на електроните в атома за съответния метал, от който е направен катодът, може да предизвика отделяне на електрона от атома. Неговата скорост е различна и зависи от взаимодействията му с други електрони. Ако е отделен от горната повърхност на катода, той ще има определена максимална енергия (тъй като не взаимодейства с други електрони), а ако е отделен от по-вътрешните слоеве на катода, вследствие на взаимодействие с други електрони от атомите във вътрешността на метала той ще намали скоростта си. В такъв случай, ако енергията, получена от електрона, е hf , част от нея се изразходва за отделяне на електрона от атома и се нарича отделителна работа (A). (Енергията на свързване на електроните в атомите за даден метал се нарича отделителна работа и е различна за различните метали.) Друга част от енергията се губи при удари с други електрони (A_1), а останалата част представлява кинетичната енергия на отделения от повърхността на метала електрон. Съгласно закона за запазване на енергията

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = A + A_1 + \frac{mv^2}{2}.$$

Ако електронът не е претърпял удари във вътрешността на метала, е изпълнено $A_1=0$ и тогава

$$(6) \quad E = hf = \frac{hc}{\lambda} = A + \frac{mv_{\max}^2}{2}.$$

Горната формула (2) е предложена от Айнщайн и се нарича уравнение на Айнщайн за външния фотоэффект и е просто приложение на ЗЗЕ за този процес. Съгласно това уравнение енергията на всеки падащ фотон се изразходва за отделяне на един електрон от повърхността на даден метал и за придаването на някаква максимална скорост на този електрон. Колкото повече фотони попадат върху метала, толкова повече фотоелектрони се отделят и толкова по-голяма стойност на фототока във веригата се регистрира, което е в съгласие с първия закон на фотоэффекта. Останалите два закона следват непосредствено от уравнението на Айнщайн (6). Тъй като отделителната работа е постоянна величина за всеки метал, с нарастването на честотата f на падащото лъчение ще расте линейно и максималната кинетичната енергия на фотоелектроните. Обратно, ако честотата на лъчението намалява, при някаква гранична стойност f_0 (λ_0) енергията на фотона ще бъде по-малка от отделителната работа A за даденото вещество и $T_{\max} = 0$ Тогава

$$(7) \quad E = hf_0 = \frac{hc}{\lambda_0} = A; \quad f_0 = \frac{A}{h}; \quad \lambda_0 = \frac{hc}{A}.$$

При тази честота (дължина на вълната) няма да има движещи се към анода електрони, т.е. фототок не протича и явлението фотоэффект не се наблюдава. Това е червената граница на фотоэффекта. В този случай енергията на падащия фотон е равна на отделителната работа и е достатъчна само за отделяне на

електрона от повърхността, т.е. придадената скорост е $v_{\max}=0$. Следователно, за да се наблюдава фотоефект за даден метал, е необходимо да бъде изпълнено условието $E>hf_0$. От (7) следва още, че червената граница зависи от химичната природа на веществото, от което е направен катодът (отделителната работа е характерна величина за всяко вещество).

Уравнението на Айнщайн може да се запише и в следния вид, като се използва (5):

$$hf = A + eU_{\text{зад}} = hf_0 + eU_{\text{зад}}$$

$$h(f - f_0) = eU_{\text{зад}}.$$

Последният израз дава възможност да се определи експериментално константата на Планк, като се облъчи даден метал с лъчения с известни честоти f_0 и f и се измери задържащото напрежение във веригата. Получената стойност се съгласува добре с тази, определена от Планк от законите на топлинното излъчване. Този факт е още едно потвърждение за верността на хипотезата на Планк и квантовата теория на Айнщайн.

Външният фотоефект намира многобройни приложения в науката и техниката. В основата им е възможността даден светлинен сигнал да се преобразува в електричен чрез фотоклетки. Получените електрични сигнали лесно могат да бъдат усилвани чрез други прибори, наречени фотоелектронни умножители, в които заедно с фотоефекта се използва и явлението вторична емисия на електроните.

Енергия и импулс на фотона

От разгледаните дотук явления, свързани със светлината и изобщо с електромагнитните вълни (интерференция, дифракция, поляризация, топлинно излъчване, фотоефект), става ясно, че в определени случаи електромагнитните вълни (в частност светлината) се проявяват като вълни, а в други – като поток от частици (кванти). Според съвременната квантова теория за светлината тези две диаметрално противоположни гледни точки могат да се обединят, като на съответните вълнови характеристики (напр. честота и дължина на вълната) се съпоставят корпускулярни (енергия, импулс). Всеки фотон може да се характеризира с енергия и импулс, определени от следните формули:

$$(8) \quad E_\gamma = hf = \frac{h\omega}{2\pi} = \hbar\omega; \quad p_\gamma = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda} = \frac{hk}{2\pi} = \hbar k,$$

където $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ е т.нар. рационализирана константа на Планк, а ω и k – съответно кръговата честота и

вълновото число на електромагнитната вълна. Така енергията и интензитетът на електромагнитната вълна са пропорционални на броя на фотоните ($E=nE_\gamma$), което беше съществено в квантовата хипотеза на Планк за топлинното излъчване и квантовото обяснение на законите на фотоефекта от Айнщайн. Електромагнитната вълна също така притежава импулс, пропорционален на вълновото ѝ число, който е насочен по посока на разпространението ѝ, следователно светлината трябва да упражнява и налягане – факт, който е установен експериментално в началото на 20 век от руския физик Лебедев.

По този начин, чрез зависимостите (8), окончателно се утвърждава квантовата хипотеза за характера на светлината и изобщо на електромагнитното лъчение – т. нар. корпускулярно-вълнов дуализъм. В определени случаи то може да проявява корпускулярен характер (топлинно излъчване, фотоефект и др.) и да се представи като поток от фотони, а в други – да проявява вълновите си свойства (интерференция, дифракция, поляризация и др.). Колкото е по-голяма честотата на лъчението (по-малка дължина на вълната), толкова по-ясно са изразени корпускулярните му свойства и обратно – при малка честота (голяма дължина на вълната) на преден план излизат вълновите му свойства.

Корпускулярно-вълнови свойства на микрочастиците. Вълни на дьо Бройл

През 1923 г. френският учен Луи дьо Бройл, изхождайки от получените връзки (8) между корпускулярните и вълновите характеристики на светлината, изказал хипотезата, че те са двупосочни – както на електромагнитната вълна с дължина на вълната λ можем да съпоставим импулс p , така на всяка микрочастица с импулс p можем, чрез същата зависимост (8), да съпоставим дължина на вълната λ :

$$(9) \quad \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

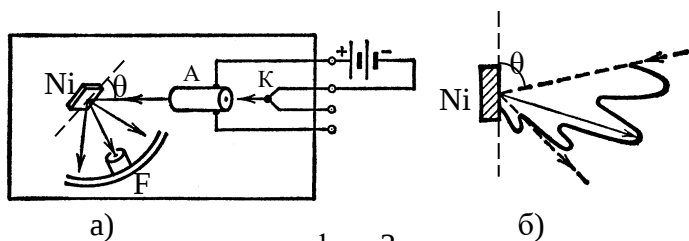
където h е константата на Планк, а m и v са съответно масата и скоростта на частицата. По този начин на всяка движеща се частица съпоставяме вълна, чиято дължина на вълната се определя от (9) и се нарича дължина на вълната на дьо Бройл. Дефиниционната формула (9) представлява едно от основните съотношения в квантовата механика.

Вълните на дьо Бройл нямат аналог в класическата физика. Природата им е специфична и по-скоро могат да се разглеждат като вълни, присъщи на веществото (материята).

Хипотезата на дьо Бройл утвърждава универсалния характер на корпускуларно-вълновия дуализъм. Ние вече не можем да говорим за вълни или за частици, а за обекти, които в даден момент проявяват корпускуларни свойства, а в друг – вълнови. Ако следваме логиката за проявата на корпускуларните и вълнови свойства, развита по-горе за светлината, би трябвало да очакваме, че вълновите свойства ще се проявяват при движение на частици с малка маса (микрочастици), които се движат със сравнително малка скорост (такива частици ще имат голяма дължина на вълната (9)). По-късно хипотезата била потвърдена експериментално от редица опити, чрез които се откриват дифракционни явления при взаимодействие на снопове бавни микрочастици (електрони, неутрони, атоми, молекули) с веществото. При проявата на корпускуларните и вълнови свойства, както на светлината, така и на частиците се счита, че те не се проявяват едновременно – в даден момент от време се проявяват или корпускуларните или вълновите свойства на обекта.

Експериментално потвърждение на вълните на дьо Бройл

Първото експериментално потвърждение на вълните на дьо Бройл е осъществено от американските физици К. Дейвисън и Л. Джърмър през 1927 г. Изучавайки разсейването на електрони от никелов монокристал, те наблюдават ясно изразена дифракционна картина. Схемата на техния опит е показана на фиг. 3а. От нагорещен катод **К** се отделят електрони, които преминават през малък отвор на анода **А** и попадат върху никеловия кристал. Електроните притежават определена скорост, зависеща от приложеното ускоряващо напрежение U във веригата на анода и катода ($v = \sqrt{(2eU)/m}$, работата на



фиг. 3

електричните сили eU се превръща в кинетична енергия на електроните $mv^2/2$). При попадане под определен ъгъл върху образаца електроните се отразяват от него и се улавят от фарадеев цилиндър **Ф**, свързан с галванометър. Подвижният цилиндър позволява да се регистрират електроните, отразени от никела в различни направления. При определен

ъгъл на падане θ от повърхността на кристала се отразяват електрони под различни ъгли. При това в едни направления се регистрират максимален брой отразени електрони, а в други – минимален брой. На фиг. 3б е показана кривата на разпределение на отразените електрони в различни направления при зададен ъгъл θ на падащия сноп. Получената картина е идентична на тази, наблюдавана при отражение на рентгенови лъчи от кристална решетка, т.е. снопът електрони наистина се държи като вълна. Дейвисън и Джърмър определили и дължината на вълната, съответстваща на разсеяните електрони, която потвърдила справедливостта на формулата на дьо Бройл (9):

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{m\sqrt{(2eU)/m}} = \frac{h}{\sqrt{2eUm}},$$

където m и e са масата и зарядът на електроните, а U – приложеното ускоряващо напрежение между анода и катода.

По-късно било установено, че не само електроните, но и други микрочастици, като протони, неутрони, атоми и даже молекули, притежават вълнови свойства. При отражение на снопове от тези частици от повърхността на различни кристали било наблюдавано явлението дифракция.

Съотношения за неопределеност на Хайзенберг. Вълнова функция

Дотук разгледахме явления, в които както фотоните, така и микрочастиците проявяват сложен корпускуларно-вълнов характер. В рамките на класическата физика е невъзможно да се обясни едновременното притежаване на толкова различни (корпускуларни и вълнови) свойства. От това неизбежно следва изводът, че някои понятия от класическата механика, въведени на основата на многобройни опити с макротелата, са неприложими към света на елементарните частици. Например за едно движещо се тяло или материална точка в класическата механика винаги е възможно едновременно и точно да бъдат определени неговата скорост и координата (положение в пространството); възможно е също така да се определи и траекторията на движението му. Оказва се, че за микрочастиците това е невъзможно – при разпространението си с дадена скорост те нямат точно определена траектория, но при взаимодействие (напр. с измервателен прибор) се регистрират в една точка. С други думи, микрочастиците не проявяват едновременно и корпускуларните и вълновите си характеристики. Ако в

едни явления се наблюдават корпускуларните им свойства, в други се проявяват вълновите им свойства. От това следва и невъзможността едновременно да бъдат определени техните координати и скорости.

Изхождайки от тези ограничения в поведението на микрочастиците, немският физик В. Хайзенберг през 1927 г. установил следните съотношения на неопределеност за координатите и импулсите (скоростите) на всяка микрочастица:

$$(10) \quad \left| \begin{array}{l} \Delta x \Delta p_x \geq h \\ \Delta y \Delta p_y \geq h \\ \Delta z \Delta p_z \geq h \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} m \Delta x \Delta v_x \geq h \\ m \Delta y \Delta v_y \geq h \\ m \Delta z \Delta v_z \geq h \end{array} \right.$$

Изразите (10) се наричат съотношения на неопределеност на Хайзенберг и изразяват т.нар. принцип на неопределеността в квантовата механика (константата в дясната част в различни учебници може да бъде записана като $\hbar$, $h/2$, $\hbar/2$ вместо h , но това не променя същността на принципа). Според този принцип произведението от неопределеностите на координатите и импулсите по дадена координатна ос не може да бъде по-малко от константата на Планк. Той показва, че в областта на микросвета координатата и импулсът на една микрочастица в дадено направление не могат да бъдат измерени едновременно. Колкото по-точно определяме координатата на частицата ($\Delta x \rightarrow 0$), толкова по-неопределен става нейният импулс по тази ос ($\Delta p_x \rightarrow \infty$) и обратно. Това не ни забранява обаче да измерваме едновременно координатата и импулсът по различни оси – напр. можем да определим с произволно голяма точност координатата по оста X и импулсът по оста Y на даден обект.

Електрон през процеп ...

Към съотношенията (10) може да се добави и още една еквивалентна зависимост

$$(11) \quad \Delta E \Delta t \geq h,$$

където ΔE е неопределеността на енергията, а Δt – неопределеността във времето. Съотношението (11) намира голямо приложение в атомната и ядрената физика. Напр. ако неопределеността на енергията на дадено свързано състояние е ΔE , то Δt е времето на живот на това състояние. Всяка система може да съществува безкрайно дълго време ($\Delta t \rightarrow \infty$) в основното си състояние, поради което в него тя притежава точно определена енергия ($\Delta E \rightarrow 0$).

Принципът на неопределеността е един от основните принципи на квантовата механика, която се базира на вероятностно възприемане на явленията и физичните променливи. Той е израз на неприложимостта на класическите понятия към поведението на микрообектите и показва, че сигурността от класическата физика не е възможна в квантовата физика. Това не означава обаче, че той е невалиден за макротелата. В областта на макросвета съотношенията на неопределеност просто нямат никакво практическо значение, тъй като неопределеността при определяне на координатите и импулсите на макротелата превишават многократно стойността на константата на Планк ($\sim 10^{-34} \text{ J.s}$).

Прашинка ...

От всичко, казано дотук, става ясно, че поведението на микрочастиците не може да се опише с понятията на класическата физика. Движещите се микрочастици нямат определено положение в пространството – те могат да бъдат открити с еднаква вероятност навсякъде. От друга страна, тяхното регистриране става винаги в една точка. В квантовата механика възниква задачата да се определи някаква функция, която да обединява вълновите и корпускуларните свойства на микрочастиците и да описва тяхното поведение. Ще поясним принципното намиране на такава функция чрез един пример със светлината, тъй като по-подробно описвахме нейните характеристики. Нека върху повърхността на прозрачна пластинка пада сноп светлина. Съгласно вълновите представи за светлината част от вълната ще се отрази от горната повърхност на пластинката, а друга част ще се пречупи и ще премине през нея. Ако означим интензитетите на падащия, отразения и пречупения сноп с I , I_r и I_t , за тях ще бъде в сила следното равенство (съгласно ЗЗЕ):

$$(12) \quad I = I_r + I_t.$$

Тъй като интензитетът на светлината е пропорционален на квадрата на амплитудата на вълната, (12) може да се запише още като

$$(13) \quad A^2 = A_r^2 + A_t^2,$$

където A , A_r и A_t са амплитудите на падащата, отразената и преминалата вълна. Ако светлината се проявява с корпускуларните си (квантови) свойства, интензитетът на падащия светлинен сноп трябва

бъде пропорционален на броя на фотоните, които се съдържат в него. Ако с N , N_r и N_t означим броя на падащите, отразените и преминалите фотони, тогава

$$(14) \quad N = N_r + N_t .$$

За да обединим двете представи за същността на светлината, трябва да допуснем, че броят на фотоните в светлинния сноп е пропорционален на квадрата на амплитудата на съответната вълна. Ако разделим (13) на A^2 , а (14) на N , ще получим:

$$(15) \quad \begin{aligned} 1 &= \frac{A_r^2}{A^2} + \frac{A_t^2}{A^2} \\ 1 &= \frac{N_r}{N} + \frac{N_t}{N} \end{aligned} .$$

Тъй като левите части в двата изрази на (15) са равни, можем да приравним и десните, откъдето следва

$$(16) \quad \frac{N_r}{N} = \left(\frac{A_r}{A} \right)^2, \quad \frac{N_t}{N} = \left(\frac{A_t}{A} \right)^2 .$$

Отношението N_r/N определя каква част от общия брой падащи фотони се отразява, или вероятността един фотон да се отрази от повърхността на разглежданата пластинка. Отношението N_t/N определя каква част от падащите фотони преминава през пластинката, т.е. вероятността даден фотон да премине през нея. Ние не знаем кой от падащите фотони ще се отрази, нито кой ще премине, но тяхното поведение може да се опише вероятностно чрез квадратите на относителните амплитуди на съответните им вълни. Изхождайки от подобни съображения, немският физик М. Борн предложил поведението на всяка микрочастица да се описва от една функция $\Psi(x,y,z,t)$, наречена вълнова функция. Тази функция в общия случай е комплексна функция и се определя от модул и аргумент ($\Psi = |\Psi|e^{i\Phi}$). Амплитудата на вълната, описвана от тази функция, е модулът. От казаното по-горе и (16) следва, че квадратът на модула (амплитудата) на вълновата функция $|\Psi|^2$ трябва да определя вероятността dW да намерим дадената микрочастица в обем dV от пространството:

$$(17) \quad |\Psi|^2 = \frac{dW}{dV}, \quad dW = |\Psi|^2 dV ,$$

т.е. квадратът на модула на вълновата функция определя плътността на вероятността – това е вероятността частицата да се намира в единица обем от пространството. Следователно физичен смисъл има квадратът на модула на вълновата функция и този смисъл е вероятностен.

Вероятността може да се променя само от 0 до 1. Ако частицата реално съществува, вероятността W_∞ да я намерим някъде в пространството (цялото тримерно пространство) трябва да е равна на 1. Тази вероятност ще получим, ако интегрираме (17) по целия обем V_∞ на пространството:

$$(18) \quad W_\infty = \int_{V_\infty} dW = \int_{V_\infty} |\Psi|^2 dV = 1 .$$

Това условие (18) се нарича условие за нормировка на вълновата функция. Физичният смисъл на (18) е свързан с факта, че при определени условия частицата със сигурност трябва да се намира в някоя точка от пространството. С други думи, условието за нормировка говори просто за обективното съществуване на частицата във времето и пространството.

Вълновата функция обединява квантовите и вълновите свойства на микрочастиците и служи за описание на тяхното поведение. За да бъде обективна характеристика на състоянието на частиците, тя трябва да удовлетворява следните условия:

- да бъде ограничена;
- да бъде непрекъсната и еднозначна;
- да се подчинява на принципа на суперпозицията – ако една частица може да се намира в различни състояния, на които съответстват вълнови функции $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n$, то тя може да заема и състояние с вълнова функция Ψ , която е линейна комбинация от тези функции:

$$\Psi = \sum_{i=1}^n c_i \Psi_i ,$$

където c_n са коефициенти (комплексни числа), а n – броят на състоянията, заемани от частицата.

Общо и стационарно уравнение на Шрьодингер

В класическата механика движението на телата се описва от втория принцип на Нютон. Той се явява диференциалното уравнение, чието решение е законът за движение на обекта. Микрочастиците притежават и вълнови свойства, поради което за характеризиране на тяхното поведение е необходимо да се използва друго диференциално уравнение. Тъй като вълновата функция описва поведението на микрочастиците е логично да се предположи, че това уравнение трябва да се отнася за нея (следователно вълновата функция трябва да бъде решение на това уравнение, т.е. тя се явява аналог на закона за движение, напр. на автомобил). От друга страна, тъй като частиците притежават и вълнови свойства, диференциалното уравнение трябва да бъде подобно на тези, които описват звуковите или електромагнитните вълни. Такова уравнение е формулирано от австрийския физик Е. Шрьодингер през 1926 г. и представлява квантово-механично обобщение на факта, че пълната енергия на дадена система е сума от кинетичната и потенциалната ѝ енергии. Това диференциално уравнение не се извежда теоретично, а представлява основен постулат за нерелативистичната квантова механика ($v \ll c$). Верността му се потвърждава от доброто съответствие между неговите следствия и получените експериментални резултати. Нарича се **общо уравнение на Шрьодингер** или **само вълново уравнение** и има следния вид:

$$(19) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(x, y, z, t) + U(x, y, z, t) \Psi(x, y, z, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x, y, z, t)}{\partial t}$$

$$\Delta \Psi = \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right)$$

където $\hbar = h/2\pi$; m е масата на движещата се микрочастица; i – имажинерната единица ($i = \sqrt{-1}$); U – потенциалната енергия на частицата в полето, в което тя се движи, а Δ е операторът на Лаплас.

Шрьодингер $\leftrightarrow$ Нютон, закон за движение $\leftrightarrow$ вълнова функция ...

Ако движещата се микрочастица се намира в стационарно силово поле и нейната потенциална енергия не зависи от времето можем да използваме (19) в по-прост вид – т.нар. стационарно уравнение на Шрьодингер. В този случай можем да представим вълновата функция като произведение от две функции – една зависеща само от пространствените координати $\Psi(x, y, z)$ и друга, която зависи само от времето $\Phi(t)$ – $\Psi(x, y, z, t) = \Psi(x, y, z)\Phi(t)$. Като заместим в (19) ще получим:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta(\Psi\Phi) + U \Psi\Phi = i\hbar \frac{\partial(\Psi\Phi)}{\partial t}; \quad -\Phi \frac{\hbar^2}{2m} \Delta\Psi + U \Psi\Phi = i\hbar \Psi \frac{\partial\Phi}{\partial t} \quad | : \Psi\Phi$$

$$(20) \quad -\frac{1}{\Psi} \frac{\hbar^2}{2m} \Delta\Psi + U = \frac{1}{\Phi} i\hbar \frac{\partial\Phi}{\partial t},$$

тъй като Ψ не зависи от времето и е константа при диференцирането по времето в дясната част, а Φ не зависи от координатите и е константа при диференцирането по координатите в лявата част. Виждаме, че лявата част на (20) зависи само от координатите (нито Ψ , нито потенциалната енергия U зависят от времето), а дясната част зависи само от времето. От друга страна (20) описва поведението на частицата и трябва да е валидно във всички точки от пространството във всеки момент от време. Това е възможно само ако и двете части са равни на една и съща константа, която не зависи нито от координатите, нито от времето:

$$-\frac{1}{\Psi} \frac{\hbar^2}{2m} \Delta\Psi + U = E = \frac{1}{\Phi} i\hbar \frac{\partial\Phi}{\partial t}.$$

Константата E наричаме пълна енергия на частицата и уравнението за частта, която не зависи от времето придобива вида:

$$-\frac{1}{\Psi} \frac{\hbar^2}{2m} \Delta\Psi + U = E; \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\Psi - (E - U)\Psi = 0$$

$$(21) \quad \Delta\Psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U)\Psi = 0.$$

Полученият израз (21) се нарича **стационарно уравнение на Шрьодингер**. Можем да го използваме винаги, когато потенциалната енергия на частицата зависи само от координатите: $U = U(x, y, z)$.