

Принцип на относителността на Галилей. Галилееви трансформации на координатите, скоростите и ускоренията. Класически закон за събиране на скорости. Неинерциални отправни системи. Инерционни сили при праволинейно и криволинейно движение

Принцип на относителността на Галилей. Галилееви трансформации на координатите

Дотук разглеждахме движението на телата спрямо избрана отправна система. Това се налага поради относителността на покоят и движението. Спрямо друга отправна система тялото ще има други координати и различна скорост. Ако двете отправни системи са неподвижни една спрямо друга, лесно се намира връзката между координатите и скоростите на тялото в двете системи. Въпросът как да намерим тази връзка, ако едната отправна система се движи спрямо другата, е решен от Галилей за инерциални отправни системи, т.е. системи, които се движат равномерно и праволинейно спрямо дадена инерциална отправна система. На базата на многобройни наблюдения и опити, той е достигнал до т.нар. механичен принцип на относителността, който ние сега наричаме принцип на относителността на Галилей – **законите на класическата механика действат по един и същ начин във всички инерциални системи**. Те не се променят при преход от една инерциална система в друга, т.е. те са инвариантни спрямо всички инерциални системи. От това следва, че и механичните процеси, които се описват от тези закони, протичат еднакво във всички инерциални системи. С други думи чрез никакви механични опити в една инерциална система не е възможно да се установи дали тя е в състояние на покой или праволинейно равномерно движение. Двете състояния са неразличими едно от друго.

Нека да разгледаме две отправни системи **K** (XYZ) и **K'** (X'Y'Z') (фиг. 1), като приемем, че **K** е неподвижна, а **K'** се движи спрямо нея с постоянна скорост $\vec{u}$ (т.е. равномерно и праволинейно). Това означава, че ако системата **K** е инерциална, **K'** също е инерциална. Нека да намерим връзката между координатите на тяло, което в даден момент от време се намира в т. **A**, в двете отправни системи. Ако означим радиус-векторът на тялото в **K** с $\vec{r}$, а в **K'** – с $\vec{r}'$, връзката между тях се дава чрез радиус-векторът $\vec{r}_0$ на началото **O'** на система **K'** спрямо система **K**:

$$(1) \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}' = \vec{r}' + \vec{u}t \quad (\vec{r}_0 = \vec{u}t).$$

Като използваме представянето на радиус-вектора чрез координатите и имаме предвид, че според класическата механика времето тече по един и същ начин във всички отправни системи, можем да запишем:

$$(2) \begin{cases} x = x' + u_x t \\ y = y' + u_y t \\ z = z' + u_z t \\ t = t' \end{cases} \text{ и обратната връзка } \begin{cases} x' = x - u_x t \\ y' = y - u_y t \\ z' = z - u_z t \\ t' = t \end{cases}.$$

Уравненията (2) се наричат Галилееви трансформации на координатите.

Галилееви трансформации на скоростите и ускоренията. Класически закон за събиране на скорости

Ако диференцираме (1) по времето ще получим скоростта на тялото спрямо **K**:

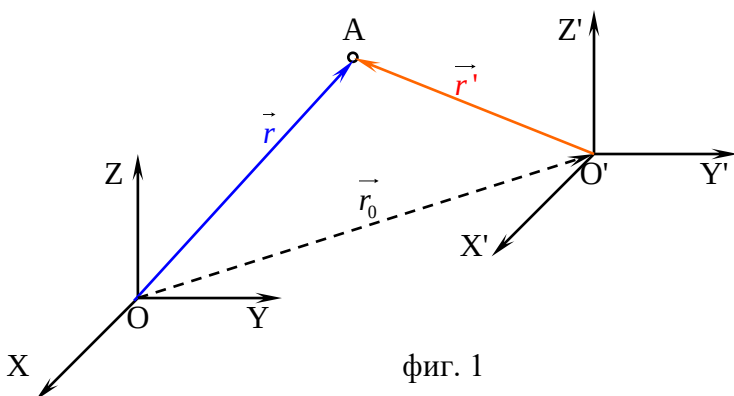
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt},$$

$$(3) \vec{v} = \vec{u} + \vec{v}'$$

където $\vec{v}'$ е скоростта му спрямо **K'**. Равенството (3) се нарича Галилеев (класически) закон за събиране на скорости.

Лодка в река, пътник във влак ...

Ускорението на тялото можем да получим като вземем първата производна на скоростта по времето:



фиг. 1

$$(4) \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d\vec{v}'}{dt} = 0 + \vec{a}' = \vec{a}',$$

тъй като скоростта $\vec{u}$ е константа. Следователно вторият принцип на Нютон, записан в двете отправни системи ще има един и същ вид:

$$\frac{\vec{F}}{m} = \vec{a} = \vec{a}' = \frac{\vec{F}'}{m} \Rightarrow \vec{F} = m\vec{a} = m\vec{a}' = \vec{F}',$$

т.е. силите, както и ускоренията в двете системи са равни – основното динамично уравнение на движение на тялото е едно и също в двете отправни системи. От казаното по-горе за координатите и скоростите следва още, че и законите за движение и законите за скоростта имат един и същ вид (различават се само с една постоянна величина – скоростта $\vec{u}$ на системата $\mathbf{K}'$ спрямо $\mathbf{K}$). Следователно законите на механиката наистина са едни и същи в двете инерциални отправни системи $\mathbf{K}$ и $\mathbf{K}'$.

Неинерциални отправни системи

Чрез първия принцип на Нютон ние въведохме инерциална отправна система. Оказва се, че принципите на Нютон се изпълняват само в инерциални системи. Ако дадена отправна система се движи с ускорение спрямо коя да е инерциална система, тя се нарича **неинерциална** отправна система. В такава отправна система се нарушават и трите принципа на Нютон.

Нека да разгледаме пак две отправни системи $\mathbf{K}$ (XYZ) и $\mathbf{K}'$ ($X'Y'Z'$) (фиг. 2), като приемем, че $\mathbf{K}$ е неподвижна. Нека система $\mathbf{K}'$ се движи спрямо нея с някаква скорост $\vec{v}_0$ и ускорение $\vec{a}_0$. Следователно, ако системата $\mathbf{K}$ е инерциална, то системата $\mathbf{K}'$ трябва да е **неинерциална**, защото се движи с ускорение спрямо инерциалната отправна система $\mathbf{K}$. Нека отново да намерим връзката между координатите и скоростите на тяло, което в даден момент от време се намира в т. A , в двете отправни системи. Ако означим радиус-векторът на тялото в $\mathbf{K}$ с $\vec{r}$, а в $\mathbf{K}'$ – с $\vec{r}'$, връзката между тях се дава чрез радиус-векторът $\vec{r}_0$ на началото O' на система $\mathbf{K}'$ спрямо система $\mathbf{K}$:

$$(5) \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'.$$

Ако диференцираме (5) по времето ще получим скоростта на тялото спрямо $\mathbf{K}$:

$$(6) \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}_0 + \vec{v}',$$

където $\vec{v}'$ е скоростта му спрямо $\mathbf{K}'$. От (6) се вижда непосредствено, че в неинерциалната отправна система $\mathbf{K}'$ се нарушава първият принцип на Нютон. Ако на тялото не действат други тела, в инерциалната система $\mathbf{K}$ скоростта му ще бъде постоянна ($\vec{v} = \text{const}$), а в неинерциалната $\mathbf{K}'$ – $\vec{v}' \neq \text{const}$, тъй като $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_0$, а $\vec{v}_0$ не е постоянна ($\mathbf{K}'$ се движи с ускорение $\vec{a}_0$ спрямо $\mathbf{K}$).

Ускорението на тялото в отправната система $\mathbf{K}$ ще получим като вземем първата производна на скоростта по времето:

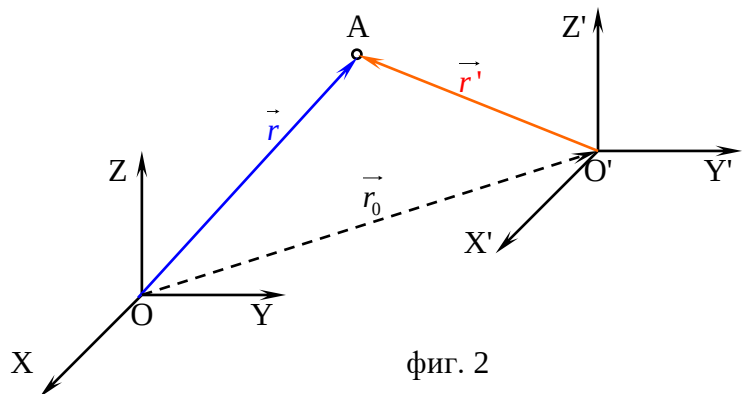
$$(7) \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{a}_0 + \vec{a}'.$$

Ускорението $\vec{a}$ и скоростта $\vec{v}$ се наричат **абсолютно** ускорение и **абсолютна** скорост на тялото (материалната точка) спрямо неподвижната система $\mathbf{K}$, а ускорението $\vec{a}'$ и скоростта $\vec{v}'$ – **относително** ускорение и **относителна** скорост на тялото спрямо движещата се ускорителна система $\mathbf{K}'$. Ускорението $\vec{a}_0$ и скоростта $\vec{v}_0$ се наричат **преносно** ускорение и **преносна** скорост (това са ускорението и скоростта на системата $\mathbf{K}'$ спрямо $\mathbf{K}$).

Инерционни сили при праволинейно и криволинейно движение

Ако върху тялото не действат сили (в инерциалната отправна система $\mathbf{K}$ това означава, че $\vec{F} = 0$ и $\vec{a} = 0$), (7) ще придобие вида:

$$\vec{a} = 0 = \vec{a}_0 + \vec{a}'$$



фиг. 2

$$(8) \vec{a}' = -\vec{a}_0,$$

което показва, че ако тялото е в покой спрямо системата **К** (или се движи праволинейно и равномерно), спрямо движещата се ускорително система **К'** то ще се движи с ускорение $\vec{a}' = -\vec{a}_0$. Следователно в **К'** се нарушава и вторият принцип на Нютон – тялото получава ускорение без да му действа сила. Оказва се, че в системата **К'** тялото привидно изпитва действие на някаква сила $\vec{F}'$, която му придава ускорение, равно по големина и обратно по посока на $\vec{a}_0$. Оттук се вижда и нарушаването на третия принцип на Нютон – тази сила няма съответстваща ѝ равна по големина и обратна по посока сила. Силата $\vec{F}'$ можем да получим като умножим (8) по масата на тялото:

$$\vec{F}' = m\vec{a}' = -m\vec{a}_0 \equiv \vec{F}_{in}.$$

Тази сила се нарича инерционна сила $\vec{F}_{in}$. Следователно в неинерциалните системи възникват допълнителни сили, наречени инерционни, които са свързани с тяхното ускорително движение, а не с някакво външно въздействие върху телата. Появата на инерционни сили в дадена координатна система е признак за ускорителното ѝ движение.

Количка с топче ...

Ако неинерциалната система **К'** се движи праволинейно, ускорението, което получава тялото в система **К**, е тангенциално ускорение ($\vec{a}_0 = \vec{a}_t$). В такъв случай инерционната сила е $\vec{F}_{in} = -m\vec{a}_t$.

Потегляне или спиране на превозно средство ...

При движение по окръжност също възниква инерционна сила – т.нар. центробежна сила, тъй като в този случай имаме нормално ускорение ($\vec{a}_0 = \vec{a}_n$, $\vec{F}_{in} = -m\vec{a}_n$). Големината на тази сила, изразена чрез скоростта или ъгловата скорост на тялото, можем да получим като използваме връзката между големините на нормалното ускорение, линейната и ъгловата скорост на тялото:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

$$F_{in} = m \frac{v^2}{R} = m\omega^2 R$$

Превозно средство, което прави завой ...

Такава сила действа на всяко тяло върху земната повърхност (отправна система, свързана с повърхността на Земята, е неинерциална, поради въртенето на Земята около оста ѝ). Центробежната сила действа на всяко тяло във въртяща се неинерциална отправна система, независимо дали то се движи спрямо нея или е в покой. Ако тялото се движи спрямо въртяща се неинерциална отправна система, възниква и т.нар. сила на Кориолис, която зависи от скоростта $\vec{v}'$ на тялото и ъгловата скорост $\vec{\omega}$ на системата ($\vec{F}_c = -2m[\vec{\omega} \times \vec{v}']$). Тази сила е причината за отклонението на свободно падащите тела на изток от отвесната права, за неравномерното отмиване на бреговете на реките – в северното полукуълбо се отмива повече десният бряг, а в южното – левият.

За инерционните сили също е валиден принципът на суперпозицията – общата инерционна сила е сума от всички действащи инерционни сили.