

Кинематика на материална точка. Основни понятия – пространство, време, отправна система, материална точка. Основни кинематични величини – преместване, път, скорост, ускорение. Тангенциално и нормално ускорение. Видове движения на материална точка в зависимост от ускорението. Праволинейно движение с постоянно ускорение – основни закони

Класическа механика

Механиката е наука, която изучава най-простата и най-обща форма на движение на материята – механичното движение. Под механично движение във физиката се разбира механичното преместване на едно тяло спрямо друго в пространството (движение) или преместване на частите на дадено една спрямо друга (деформация).

Механиката е тази част от физиката, която най-непосредствено е свързана с нашите всекидневни наблюдения и опит и която разглежда движението и взаимодействието на заобикалящите ни тела. Основните ѝ закони са установени и формулирани от Г. Галилей и И. Нютон през XVII в. Те описват движението на телата с неголеми скорости, както и на небесните тела. Механиката на Галилей и Нютон, която изучава движението на телата със скорости, значително по-малки от скоростта на светлината ($v \ll c$), се нарича класическа механика.

От своя страна класическата механика се дели на три части: кинематика, динамика и статика. Кинематиката е дял от механиката, в който се изучават характеристиките на движението на телата (път, скорост, ускорение), без да се засяга въпросът за причините, които пораждат това движение. Динамиката е този дял от механиката, в който се изучават законите за движение на телата във връзка с причините, които го пораждат. Статиката изучава законите за равновесие на телата.

В настоящия раздел ще разгледаме основите на кинематиката и динамиката.

Кинематика на материална точка

Време и пространство. Материална точка. Отправна система

Всяко изменение на състоянието на реалните обекти в природата или на избраните от нас модели при изучаването на даден процес се нарича събитие. Всички събития се осъществяват във времето и пространството. Те се явяват първични понятия, за които не може да се даде точно определение, но можем да получим представа за тяхната същност чрез основните им характеристики. Времето характеризира продължителността и последователността на събитията, а пространството – размерите и взаимното разположение на обектите.

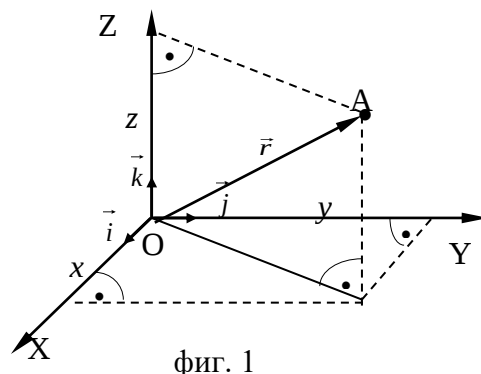
Най-простият модел, който се използва в механиката при изучаване движението на телата, е материална точка. Материалната точка е обект, за който можем да приемем, че всичките му характеристики, с изключение на масата, са несъществени при даден процес, т.е. можем да пренебрегнем размерите, формата, температурата, електричния заряд, веществото, от което е изграден и т.н. В кинематиката не се интересуваме дори и от масата на обекта – той представлява за нас една математическа точка.

Движение на автомобил в различни ситуации ...

Движението на дадено тяло (при кинематичното разглеждане на движението, винаги когато говорим за тяло, ще имаме предвид материална точка) може да се опише чрез промяна на местоположението му в пространството за даден интервал от време. Движението (както и покоят) обаче, е относително – тялото **A** може да се движи спрямо тялото **B**, но да се намира в покой спрямо тялото **C**. За това възниква необходимостта от въвеждането на отправно тяло – такова тяло, което ние приемаме за неподвижно при дадено разглеждане.

Движение спрямо Земята и влак ...

За да се определи положението на една материална точка в пространството, обикновено се използва отправна система. Тя представлява отправно тяло, неподвижно свързано с началото на координатна система. В такава отправна система, местоположението на тялото се определя чрез радиус-вектор $\vec{r}$. Това е вектор с начало в началото на отправната система и край в точката, в която се намира тялото. По този начин еднозначно



може да се определи местоположението на тялото. Друг начин за определяне на местоположението (еквивалентен на първия) е чрез проекциите на радиус-вектора върху координатните оси – това са координатите на точката в дадената отправна система. Броят на координатите, с помощта на които еднозначно се определя положението на дадена точка, се нарича брой на степените на свобода. В тримерното пространство този брой е три, но ако описваме движението в равнина са ни достатъчни две координати, а върху права – една. Най-простият случай на координатна система е Декартовата (правоъгълна) координатна система, в която трите оси са взаимно перпендикулярни (фиг. 1). Проекциите на радиус-вектора $\vec{r}$ върху трите оси са съответно числата x , y и z . Всяка от тези проекции може да се представи като вектор – $x\vec{i}$, $y\vec{j}$, $z\vec{k}$, където $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ са единичните вектори по съответните оси (единичният вектор е вектор с дължина единица). От фиг. 1 се вижда, че радиус-векторът $\vec{r}$ може да се представи като сума от тези вектори:

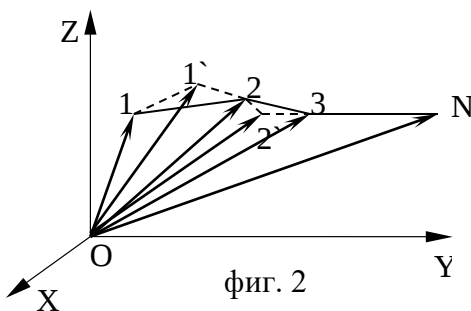
$$(1) \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Като приложим два пъти Питагоровата теорема, можем да определим и големината на радиус-вектора чрез координатите му:

$$r \equiv |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Траектория, път, преместване

След като можем да определим местоположението на дадено тяло, за да опишем движението трябва да намерим начин да описваме промяната на местоположението му. Тъй като тази промяна се извършва във времето, трябва да прикрепим към отправното тяло и подходящо избран часовник за отчитане на времето. Така отправната система, която включва отправно тяло, координатна система и часовник, вече е подходяща за описване и на движението на тялото, а не само на местоположението му.



Нека разгледаме тяло, което в даден момент t_1 заема положение **1** в пространството. Да предположим, че с течение на времето тялото се премества и заема нови положения: **2** в момента t_2 , **3** в момента t_3 и т.н. до някакво крайно положение **N** в момента t_N . Преходът на тялото от положение **1** до положение **N** се изобразява със сложна начупена линия (фиг. 2). Ако определяме по-често местоположението на тялото в интервала от t_1 до t_N ще получим по-гладка начупена линия (пунктираната линия на фиг. 2). Ако можем да определяме местоположението

във всеки момент от време, ще получим гладка крива линия – в нашия случай кривата **1–N** (фиг. 3).

Тази крива линия се нарича траектория на движението. Ако свържем отделните положения на тялото в различните моменти от време с началото **O** на координатната система, ще получим съответните радиус-вектори за всяко негово местоположение при движение по траекторията му: $\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \vec{r}_3(t), \dots, \vec{r}_N(t)$. Вижда се, че при преместването на тялото радиус-векторът се променя както по големина, така и по посока, а крайт му се движи в пространството и описва траекторията на движението **1–N**.

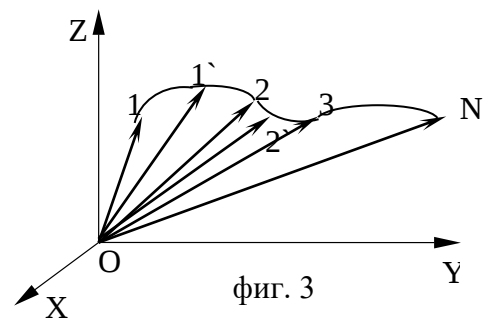
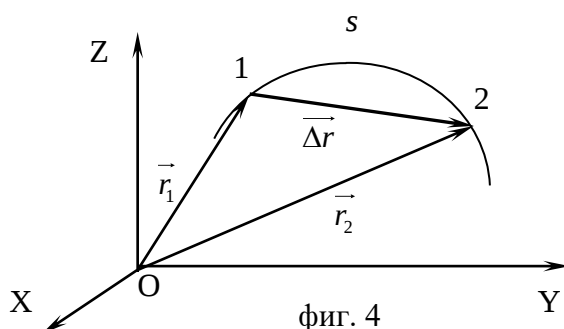
Ако тялото в момент от време t_1 се намира в точка **1** с радиус-вектор $\vec{r}_1(t)$, а в момент t_2 – в точка **2** с радиус-вектор $\vec{r}_2(t)$ (фиг. 4), движението му от **1** до **2** може да се опише с две физични величини – преместване и път. Преместването $\vec{\Delta r}$ е вектор, равен на разликата от радиус-векторите в крайното (т. **2**) и началното (т. **1**) положения на тялото:

$$\vec{\Delta r}(t) = \vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t).$$

(Всички величини, които ще въвеждаме в кинематиката зависят от времето t . Затова в уравненията оттук нататък няма да пишем аргумента t на разглежданите функции, ще го приемаме по подразбиране).

Движение по окръжност ...

Както се вижда от определението, преместването зависи само от началното и крайното положение на тялото. Ако то



се придвижи от т. 1 до т. 2 и след това обратно до т. 1 преместването му ще бъде **0**. Затова понякога е удобно да се използва друга величина, описваща движението – изминатият път s . **Пътят е разстоянието по траекторията между т. 1 и т. 2 изминато от тялото**. От определението се вижда, че пътят е скаларна, при това винаги положителна, величина. Мерната единица за дължина – метър [m] е основна в SI. Преместването и пътят се измерват в метри. Като сравним големината на преместването $|\vec{\Delta r}|$ с изминатия път s , виждаме, че $|\vec{\Delta r}| \leq s$. Равенство имаме само когато движението е праволинейно и при това еднопосочно.

Движение между две сгради ...

Скорост на движение

Величините преместване и път, които въведохме за характеризиране на движението, очевидно не са достатъчни за пълното му описание. Две тела могат да изминат еднакъв път за различно време. Трябва да въведем величина, която да включва и времето, за което се извършва дадено движение. Тази величина се нарича **скорост на движение и може да се определи като преместването на тялото за единица време**. От определението следва, че скоростта, също както и преместването, е векторна величина. Определената по този най-общ начин скорост се нарича **средна скорост** $\langle \vec{v} \rangle$. Ако за интервал от време Δt , преместването му е $\vec{\Delta r}$, средната скорост се дефинира с равенството:

$$(2) \quad \langle \vec{v} \rangle = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}.$$

От (2) се вижда, че скоростта по посока съпада с посоката на преместването $\vec{\Delta r}$ и има размерност дължина върху време, или мерната ѝ единица е метър в секунда [m/s].

Тъй като $|\vec{\Delta r}| \leq s$ (хордата винаги е по-малка от прилежащата ѝ дъга), при криволинейните движения за големината на средната скорост е в сила неравенството:

$$|\langle \vec{v} \rangle| \leq \frac{s}{\Delta t}.$$

Ако движението на тялото е еднопосочно по права линия, е изпълнено:

$$|\langle \vec{v} \rangle| = \frac{s}{\Delta t} = \frac{|\vec{\Delta r}|}{\Delta t},$$

или в този случай големината на средната скорост се определя от изминатия път за единица време.

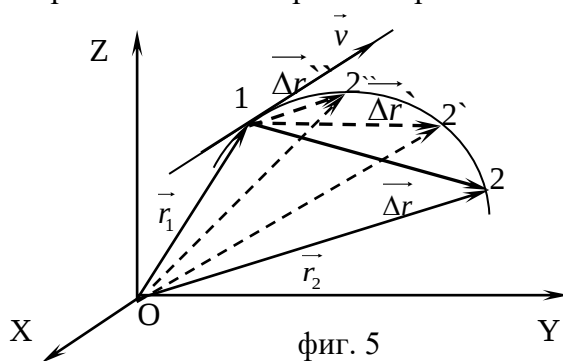
От определението се вижда, че средната скорост не ни дава достатъчно информация за движението. Ако едно тяло се движи от т. А до т. В и обратно до т. А, неговата средна скорост е нула, т.е. ние не получаваме никаква информация за движението. Затова се въвежда величината **моментна скорост** (или просто скорост), която се дефинира като преместването $\vec{dr}$ за безкрайно малък интервал от време dt :

$$(3) \quad \vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt},$$

т.е. **скоростта е първа производна на радиус-вектора по времето**. От (3) следва директно, че скоростта **ВИНАГИ** е насочена в посока на движението. От фиг. 5 се вижда, че при приближаване на т. 2 към т. 1, векторът $\vec{\Delta r}$ се приближава до допирателната в т. 1. В граничния случай $\vec{dr}$ (а следователно и $\vec{v}$) ще бъде насочен по допирателната към кривата. Това означава, че скоростта винаги е насочена по допирателната на траекторията на движение. Тъй като при $\Delta t \rightarrow 0$ е изпълнено $|\vec{dr}| = ds$, големината на моментната скорост ще бъде:

$$v \equiv |\vec{v}| = \frac{|\vec{dr}|}{dt} = \frac{ds}{dt}.$$

Също както постъпихме и при радиус-вектора $\vec{r}$ (1), ние можем да проектираме вектора $\vec{v}$ по координатните оси и да го изразим като векторна сума на проекциите му:



фиг. 5

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k},$$

а големината на векторът на скоростта е:

$$v \equiv |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Ускорение

Видяхме, че скоростта на движение също може да се променя по време на движение. За да може да описваме промяната на скоростта се въвежда нова величина, наречена **ускорение**. То играе същата роля спрямо скоростта, както скоростта спрямо преместването – определя изменението на скоростта за единица време. Ускорението също е векторна величина и посоката ѝ е по посока на вектора на изменение на скоростта $\Delta \vec{v}$. И тук по подобен начин можем да въведем величините средно и моментно ускорение. Средното ускорение се дефинира като изменението на скоростта за единица време:

$$(4) \langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}.$$

От (4) се вижда, че мерната единица за ускорението е метър в секунда на квадрат [m/s²].

Също както средната скорост, средното ускорение не е много информативна величина. Затова и тук по подобен начин се въвежда моментно ускорение (или просто ускорение), което ни дава информация за ускорението в даден момент от движението на тялото:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Вижда се, че **ускорението е първата производна на скоростта по времето**. Като заместим моментната скорост с израза (3), ще получим:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2},$$

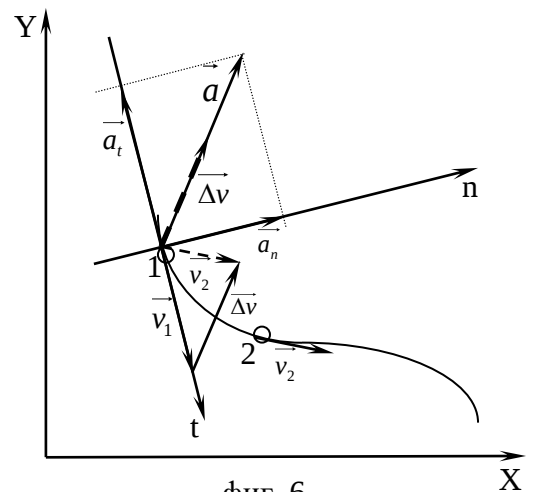
т.е. **ускорението е втора производна на радиус-вектора по времето**. Ако разложим вектора $\vec{a}$ по компоненти, подобно на радиус-вектора (1) и скоростта, можем да изразим големината на ускорението чрез неговите проекции по координатните оси:

$$a \equiv |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Тангенциално и нормално ускорение

Предвид важността на величината ускорение, от една страна характеризираща типа движение, а от друга – даваща връзка между кинематиката и динамиката, ще я разгледаме малко по-подробно. Видяхме, че ускорението може да се разложи на компоненти по координатните оси във всяка координатна система, също както скоростта или радиус-вектора. При двумерно движение обаче (движение в равнина), каквито са по-голямата част от реалните движения, е по-удобно да се използва друг вид разлагане на вектора на ускорението. Нека да разгледаме едно произволно криволинейно движение на тяло в равнина (фиг. 6). За да определим ускорението на тялото, ние трябва да намерим разликата между скоростите $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ в точките 1 и 2. Тази разлика е векторът $\Delta \vec{v}$, а ускорението (чиято посока е в

посока на $\Delta \vec{v}$) е насочено към вдлъбнатата част на кривата. Ако намаляваме интервала от време, т. 2 ще се приближава до т. 1 и в граничния случай ще получим моментното ускорение в т. 1. Виждаме, че ускорението в общият случай не е насочено по направлението на скоростта. В такъв случай можем да разложим ускорението $\vec{a}$ на две компоненти – едната от тях, наречена **тангенциално ускорение** $\vec{a}_t$, е насочена по направление на скоростта, т.е. по допирателната (тангентата) към кривата в дадената точка (скоростта винаги е насочена по допирателната към траекторията); другата компонента наричаме **нормално ускорение** $\vec{a}_n$ и тя е насочена по перпендикуляра (нормалата) към траекторията в тази точка. Следователно пълното ускорение може да се представи като векторна сума от двете си компоненти:



фиг. 6

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t,$$

а големината му ще се дава от израза:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}.$$

По такъв начин ние получаваме две компоненти на ускорението, всяка от които характеризира различни качества на скоростта. Тангенциалното ускорение е насочено винаги по направление на скоростта – следователно то не може да променя скоростта по посока. Ако то е насочено по посока на скоростта ще я увеличава по големина, а ако е насочено в противоположна посока – ще я намалява. Следователно тангенциалното ускорение $\vec{a}_t$ е отговорно само за промяната на големината на скоростта, но не и на посоката ѝ. Нормалното ускорение е насочено винаги перпендикулярно на скоростта. Неговата проекция върху направлението на скоростта е нула. То не може да влияе на големината на скоростта, а само върху посоката на вектора $\vec{v}$. Следователно нормалното ускорение $\vec{a}_n$ е отговорно само за промяната на посоката на движение, но не и на големината на скоростта.

От тези разсъждения произтича и ролята на ускорението (и по-точно двете му компоненти $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_t$) като характеристика на типа движение. Ако тангенциалното ускорение е нула, скоростта не се променя по големина, т.е. имаме равномерно движение. Ако нормалното ускорение е нула, скоростта (а следователно и преместването) не се променя по посока – имаме праволинейно движение.

Видове движения на материална точка в зависимост от ускорението

Ще разгледаме малко по-подробно как, чрез двете компоненти на ускорението $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_t$, можем да характеризираме практически всички видове движения.

1. Ускорението $\vec{a}_n = 0$ – скоростта не се изменя по посока. В този случай движението е праволинейно. Тези движения от своя страна се разделят на няколко вида в зависимост от вида на тангенциалното ускорение:

- $\vec{a}_t = 0$, скоростта е постоянна по големина: движението е праволинейно равномерно;
- $\vec{a}_t = \text{const} \neq 0$, скоростта се изменя по големина с постоянна стойност: движението е праволинейно равнопроменливо (ако $\vec{a}_t > 0$, то е равноускорително; ако $\vec{a}_t < 0$ – равнозакъснително);
- $\vec{a}_t = f(t)$ ($\vec{a}_t$ се изменя непрекъснато с времето): движението е праволинейно неравнопроменливо;

2. Ускорението $\vec{a}_n \neq 0$ – скоростта се изменя по посока. В този случай движението е криволинейно. Тези движения от своя страна се разделят на няколко вида в зависимост от вида на $\vec{a}_t$:

- $\vec{a}_t = 0$, скоростта се запазва постоянна по големина: движението е криволинейно равномерно (частен случай на криволинейното равномерно движение е равномерното движение по окръжност);
- $\vec{a}_t = \text{const} \neq 0$, скоростта се изменя по големина с постоянна стойност: движението е криволинейно равнопроменливо;
- $\vec{a}_t = f(t)$ ($\vec{a}_t$ се изменя непрекъснато с времето): движението е криволинейно неравнопроменливо.

Праволинейно движение с постоянно ускорение

Ако едно тяло се движи праволинейно, от казаното по-горе следва, че нормалното ускорение $\vec{a}_n = 0$. Следователно пълното ускорение е равно на тангенциалното – $\vec{a} = \vec{a}_t$. При такова движение, ако ускорението е постоянно ($\vec{a} = \vec{a}_t = \text{const}$), имаме два възможни случая:

1. $a = a_t = 0$ – движението е равномерно.

В този случай скоростта е постоянна, защото:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{const}.$$

Тъй като скоростта не се променя (по големина и посока) и движението е праволинейно еднопосочно (напр. по оста X), можем да запишем:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$v = \frac{|\Delta x|}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{\Delta t} = \frac{s}{\Delta t}$$

От последното уравнение можем да получим и закона за движение при равномерно праволинейно движение:

$$s = x - x_0 = v\Delta t;$$

$$x = x_0 + v\Delta t = x_0 + v(t - t_0).$$

Тук x_0 е координатата на тялото в началния момент t_0 . Ако изберем този момент да е нула, ще стигнем до познатия вид на закона:

$$(5) \quad x = x_0 + vt; \quad s = x - x_0 = vt.$$

Законите за движение и скоростта ($x(t)$ и $v(t)$) могат да се представят и графично (фиг. 7). От графиката на закона за скоростта (фиг. 7б) се вижда, че изминатият път s е числено равен на площта S под кривата (в случая права) между моментите от време 0 и t .

Можем да получим закона за движение и по друг начин – от определението за скорост, като интегрираме уравнението при $v = \text{const}$ (както на практика получихме закона за скоростта):

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad dx = vdt, \quad \int_{x_0}^x dx = \int_0^t vdt = v \int_0^t dt, \quad x|_{x_0}^x = vt|_0^t, \quad x - x_0 = vt, \quad x = x_0 + vt.$$

2. $a = a_t = \text{const} \neq 0$ – движението е равнопроменливо. В този случай ускорението е постоянно, а движението пак е праволинейно еднопосочно (по оста X). Ако ускорението е в посоката на движение, ще имаме равноускорително движение, а ако е в обратна посока – равнозакъснително. Първо ще разгледаме случая на равноускорително движение – тогава скоростта и ускорението са еднопосочни. Можем да получим закона за скоростта по същия начин, по който получихме закона за пътя при равномерно движение:

$$a = \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t}, \quad |\Delta \vec{v}| = v - v_0 = a(t - t_0),$$

$$v = v_0 + a(t - t_0)$$

а ако изберем момента $t_0 = 0$, ще го получим в познатия вид:

$$v = v_0 + at.$$

Законът за движение можем да получим като построим графиката на скоростта v от времето – изминатият път $s = x - x_0$ пак трябва да е числено равен на площта $S = S_1 + S_2$ под графиката (фиг. 8).

$$S_1 = v_0 t$$

$$S_2 = \frac{1}{2}(v - v_0)t = \frac{1}{2}at^2.$$

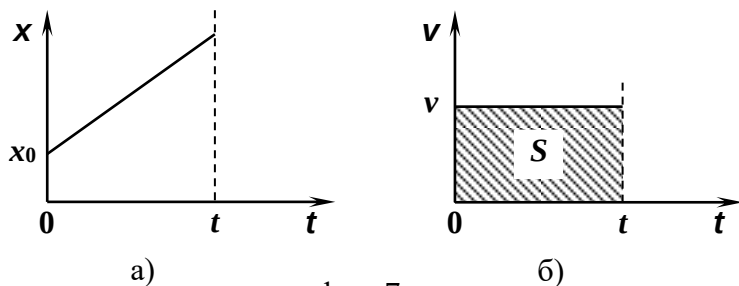
$$S = S_1 + S_2 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Следователно:

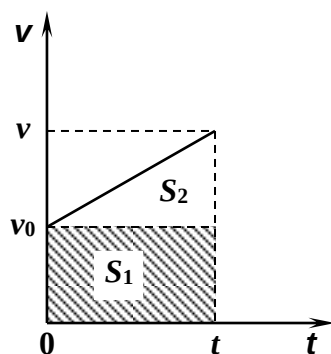
$$s = x - x_0 = S = v_0 t + \frac{1}{2}at^2;$$

$$(6) \quad x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2.$$

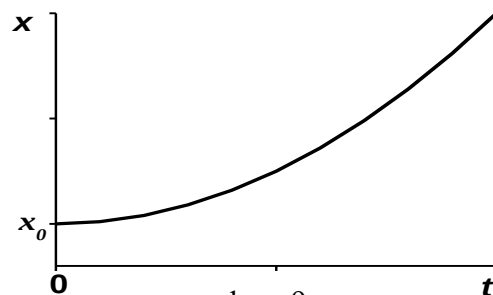
И тук x_0 е началната координата, както в (5), а v_0 е началната скорост (скоростта в избрания от нас начален момент за отчитане на времето). Законът за движение (6) също може да се представи графично – това е парабола с връх в точката x_0 (фиг. 9).



фиг. 7



фиг. 8



фиг. 9

Ако движението е равнозакъснително ще получим:

$$a = \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t}, |\Delta \vec{v}| = v_0 - v = a(t - t_0)$$

$$v = v_0 - a(t - t_0)$$

и ако изберем момента $t_0=0$:

$$v = v_0 - at,$$

а графиката ще има обратен наклон (фиг. 10). Тогава $S=S_1-S_2$ и законът за движение ще бъде:

$$s = x - x_0 = S = v_0 t - \frac{1}{2} at^2;$$

$$x = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} at^2.$$

Законите за движение и скоростта при равнопроменливи движения (равноускорително и равнозакъснително) могат да се запишат и с общи формули:

$$v = v_0 \pm at$$

$$x = x_0 + v_0 t \pm \frac{1}{2} at^2,$$

като знакът „+” се отнася за равноускорително движение, а „-” – за равнозакъснително.

При равнопроменливите движения също можем да получим законите за скоростта и движението като интегрираме уравненията (определенията за скорост и ускорение):

$$a = \pm \frac{dv}{dt}, dv = \pm a dt, \int_{v_0}^v dv = \pm a \int_0^t dt, v|_{v_0}^v = \pm at|_0^t, v - v_0 = \pm at,$$

$$v = v_0 \pm at$$

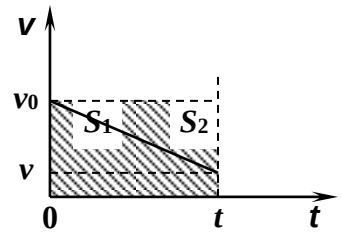
като знакът е „+” ако скоростта расте и „-” ако намалява ($a = |\vec{a}|$ е големината на ускорението и трябва да е положителна величина).

$$v = \frac{dx}{dt}, dx = v dt, \int_{x_0}^x dx = \int_0^t v dt = \int_0^t (v_0 \pm at) dt = v_0 \int_0^t dt \pm a \int_0^t t dt$$

$$x|_{x_0}^x = v_0 t|_0^t \pm \frac{1}{2} at^2|_0^t, x - x_0 = v_0 t \pm \frac{1}{2} at^2$$

$$x = x_0 + v_0 t \pm \frac{1}{2} at^2$$

Движение на автомобил от тръгване да спиране ...



фиг. 10