Механична енергия. Работа на постоянна и променлива сила. Мощност. Кинетична енергия при постъпателно движение. Връзка между работа и кинетична енергия. Консервативни сили. Потенциална енергия. Връзка между работа и потенциална енергия. Закон за изменение и запазване на пълната механична енергия

Механична енергия. Работа на сила. Мощност

Динамичните величини, които въведохме дотук, описват доста пълно механичното движение. В много случаи обаче, това описание е математически много сложно и трудоемко. То може съществено да се опрости, ако въведем една друга характеристика на телата – енергия. Енергията е първично, фундаментално понятие, на което не може да се даде точно определение (също като импулса, пространството или времето). Тя се въвежда във физиката като количествена мярка за различните форми на движение на материята и съответните им превръщания и взаимодействия. Енергията е скаларна величина и обикновено се означава се с E. За различните форми на движение на материята във физиката се въвеждат и различни видове енергия – механична, топлинна, електромагнитна, ядрена и др. Определянето на енергията на едно тяло винаги е свързана с определени условности или предварителни допускания. Това е свързано с условността при избиране на отправна система. За нас обаче, винаги е от значение не конкретната стойност на енергията в даден момент, а изменението ѝ за даден интервал от време, при което тези условности вече отпадат.

Най-простият вид енергия е механичната, която характеризира механичното движение и взаимодействие на телата. Тя зависи от тяхната скорост (кинетична) и взаимно разположение (потенциална). Изменението на механичната енергия на едно тяло е свързано с действието на външни сили върху него. За количествено описание на това изменение се въвежда понятието работа на сила. Работата винаги е свързана с промяната на някаква енергия и обратно – промяната на енергията винаги е свързана с извършване на работа. Работата също е скаларна величина и се означава се с A. Работата на сила във физиката се свързва с преместването на дадено тяло (или части от тялото една спрямо друга) под действие на приложена сила.

Първо ще разгледаме най-простия случай – силата, действаща на тялото, е постоянна (както по големина, така и по посока!). Под работа на една постоянна сила, при преместване на дадено тяло на определено разстояние, се разбира величината A, равна на произведението от модула на силата $\vec{F}$, модула на преместването $\Delta\vec{r}$ и косинуса на ъгъла α между посоката на вектора на силата и посоката на вектора на преместването, или казано на математически език, това е скаларното произведение на векторите $\vec{F}$ и $\Delta\vec{r}$:

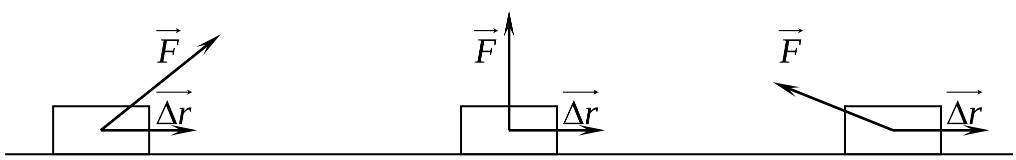
(1) $A = \left|\vec{F}\right|\left|\Delta\vec{r}\right|\cos\alpha = \vec{F}.\Delta\vec{r}$.

От дефиниционната формула (1) се вижда, че мерната единица за работа е [N.m] или, ако разпишем подробно N – [kg.m^2/s^2]. Тази единица е наречена джаул [J].

От (1) можем да направим няколко важни извода:

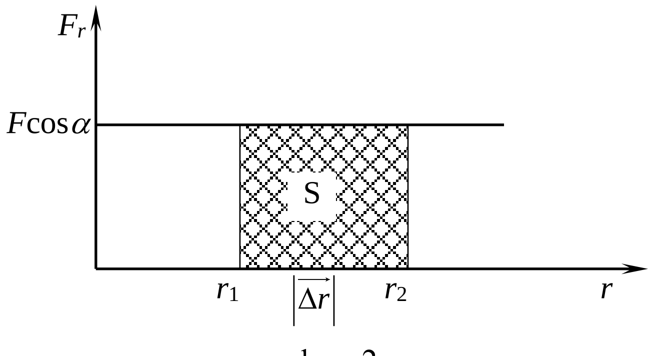
1. работа се върши само тогава, когато действа сила и имаме преместване на тялото (не непременно под действие само на тази сила);
2. извършената работа е алгебрична величина и може да бъде положителна, отрицателна или нула, в зависимост от посоката на силата спрямо посоката на преместването (фиг. 1);

$\alpha<\pi/2$; $\cos\alpha>0$; $A>0$ $\alpha=\pi/2$; $\cos\alpha=0$; $A=0$ $\alpha>\pi/2$; $\cos\alpha<0$; $A<0$



фиг. 1

3. величината $\left|\vec{F}\right|\cos\alpha \equiv F\cos\alpha = F_r$ представлява проекцията на силата $\vec{F}$ върху посоката на преместването $\Delta\vec{r}$. При постоянна сила не се променя нито F, нито α, следователно F_r е константа. Ако построим графиката (права



фиг. 2

линия) на тази проекция от радиус-вектора $\vec{r}$ (фиг. 2) виждаме, че площта на защрихования правоъгълник $S = F\cos\alpha.\left|\overrightarrow{\Delta r}\right| = A$. Следователно, работата на силата $\vec{F}$ може да се представи графично като площта под графиката на проекцията F_r между началното положение $\vec{r_1}$ и крайното $\vec{r_2}$.

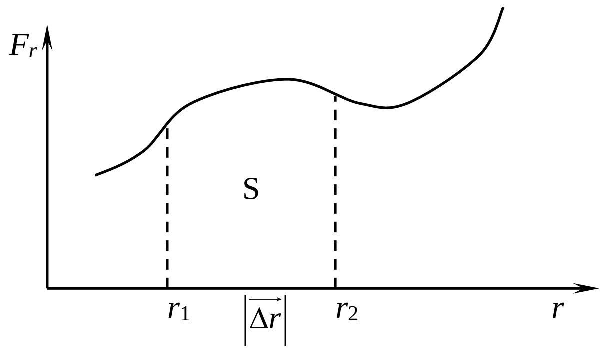
Ако на едно тяло действат повече от една сила, общата работа, която извършват всички сили е равна на алгебричната сума от работите, извършени от всяка сила поотделно:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i}$$

$$A = \vec{F}.\overrightarrow{\Delta r} = \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{F_i}\right).\overrightarrow{\Delta r} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i}.\overrightarrow{\Delta r} = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

Следователно работата е адитивна величина и можем да я пресмятаме като работа на равнодействащата на всички действащи на тялото сили.

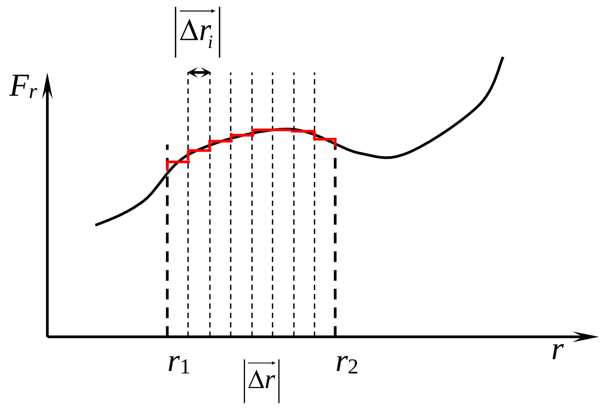
Какво ще се промени, ако силата не е постоянна? В този случай големината на силата F и ъгълът α може да се променят във всеки момент от време. Тогава проекцията F_r няма на е константа и графиката ще бъде някаква крива линия (фиг. 3). Но това не променя същността на последния извод, който направихме – работата е равна на площта под графиката между началното и крайното положение на тялото. Трябва само да пресметнем площта S. За тази цел разделяме преместването $\overrightarrow{\Delta r}$ на отделни малки участъци с големина $\left|\overrightarrow{\Delta r_i}\right|$ (фиг. 4), в които можем да смятаме, че силата $\vec{F_i}$ е постоянна (тя е различна в различните участъци, но постоянна във всеки един от тях). Така във всеки един от малките участъци можем да приложим (1) за пресмятане на работата A_i. Общата работа за преместване на тялото ще получим като сумираме всички работи A_i.



фиг. 3

(2) $A \approx \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i}.\overrightarrow{\Delta r_i}$.

Виждаме, че площта получена от (2) малко се различава от действителната площ под графиката (фиг. 4). Това е площта под начупената линия, която не покрива точно гладката крива. На колкото повече участъци $\left|\overrightarrow{\Delta r_i}\right|$ разделим преместването, толкова по-точно ще пресметнем работата A (тъй като начупената линия все повече ще се доближава до кривата). Ако можем да разделим преместването на безкрайно много безкрайно малки участъци $\left|\overrightarrow{dr_i}\right|$, за всеки от тях ще се извърши някаква безкрайно малка работа $dA_i = \vec{F_i}.\overrightarrow{dr_i}$, а ако сумираме всички тези работи dA_i, ще получим точната стойност. Такова сумиране на безкрайно малки величини се извършва чрез интегриране:



фиг. 4

(3) $A = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}.\overrightarrow{dr} = \int_{r_1}^{r_2} F_r dr$.

Формула (3) е обобщение на (1) за произволна сила. Виждаме, че ако силата е постоянна, F_r ще бъде константа и можем да я изнесем пред интеграла:

$$A = F_r\int_{r_1}^{r_2} dr = F_r.r\Big|_{r_1}^{r_2} = F_r\left(r_2 - r_1\right) = F_r\left|\overrightarrow{\Delta r}\right| = \left|\vec{F}\right|\left|\overrightarrow{\Delta r}\right|\cos\alpha.$$

Различни сили могат да извършат една и съща работа, но за различно време. Величината, която ни дава ефективността на силата се нарича мощност и се дефинира като работата, извършена от дадена сила за единица време:

$$P = \frac{dA}{dt}.$$

Както се вижда от формулата, мерната единица за мощност е [J/s]. Тази единица е наречена ват [W].

Кинетична енергия при постъпателно движение. Връзка между работа и кинетична енергия

Нека да пресметнем работата на сила в най-простия случай – тялото е неподвижно и му действа само една сила $\vec{F}$. За малък интервал от време dt, преместването на тялото ще бъде $\vec{dr}$, а скоростта му ще нарастне с $\vec{dv}$. За това време силата ще извърши работа dA:

$$(4)\quad dA = \vec{F}.\vec{dr} = Fdr = madr = m\frac{dv}{dt}dr = m\frac{dr}{dt}dv = mvdv,$$

тъй като силата и преместването са еднопосочни ($\cos\alpha=1$) и можем да разменим производните на r и v. Извършената работа за краен интервал от време, за който скоростта се променя от **0** до v, ще бъде:

$$A = \int_0^t dA = \int_0^v mvdv = m\int_0^v vdv = \frac{m}{2}v^2\Big|_0^v = \frac{mv^2}{2} - 0.$$

В по-общият случай, когато началната скорост на тялото не е **0**, а е v_1 (но силата действа в направлението на скоростта), а крайната – v_2, за работата ще получим:

$$(5)\quad A = \int_0^t dA = \int_{v_1}^{v_2} mvdv = m\int_{v_1}^{v_2} vdv = \frac{m}{2}v^2\Big|_{v_1}^{v_2} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}.$$

Виждаме, че работата на силата $\vec{F}$ се явява разлика от две еднотипни величини – произведението на масата и квадрата на скоростта на тялото, разделено на **2**, т.е. можем да я представим като разлика от стойностите на една и съща величина в моментите от време t_1 и t_2, в които тялото има скорост съответно v_1 и v_2. Същата зависимост (5) се получава и когато силата и началната скорост не са в едно направление. Тази величина наричаме кинетична енергия T на тяло с маса m, което се движи със скорост v:

$$(6)\quad T = \frac{mv^2}{2}.$$

От определението е ясно, че кинетичната енергия се измерва в същите единици, както и работата – джаули. Вижда се също, че тя е скаларна величина – не зависи от посоката на скоростта, а само от големината ѝ. Тъй като скоростта на тялото зависи от избора на отправна система, в която разглеждаме движението, то и кинетичната му енергия също зависи от този избор (както казахме по-горе обаче, ние се интересуваме от промяната на енергията, а тази промяна вече не зависи от избора на отправна система).

Като използваме определението за T (6), можем да запишем (5) в следния вид:

$$A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = T_2 - T_1 = \Delta T,$$

или за много малък интервал от време dt (4):

$$dA = dT = mvdv,$$

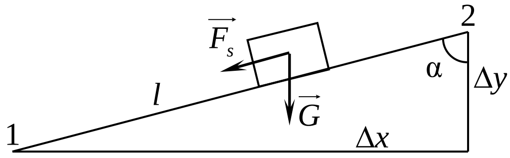
от което следва връзката между работата A на силата $\vec{F}$ и промяната на кинетичната енергия на тялото: работата, извършена от външната сила върху свободно тяло, е равна на промяната на кинетичната енергия T на тялото (тя може да се увеличава или да намалява, тъй като в общия случай силата може да сключва произволен ъгъл с посоката на движение на тялото).

Кинетичната енергия, също както и работата, е адитивна величина. Ако имаме механична система от n тела, всяко с маса m_i и скорост $\vec{v_i}$, общата кинетична енергия на системата е сума от кинетичните енергии на отделните тела:

$$T_i = \frac{m_i v_i^2}{2},$$

$$T = \sum_{i=1}^{n} T_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Консервативни сили. Потенциална енергия. Връзка между работа и потенциална енергия



фиг. 5

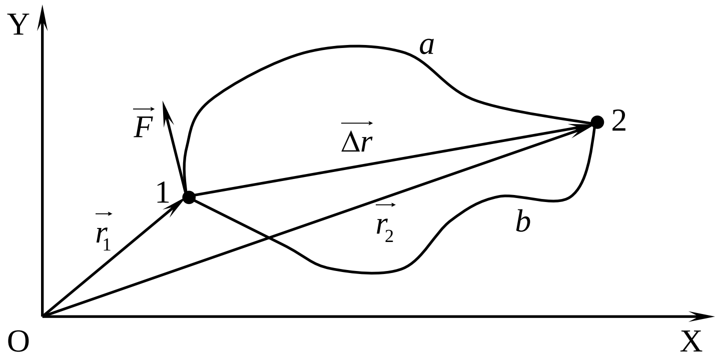
Нека да пресметнем работата, извършена от различни сили. При издигане на тяло по наклонена равнина от т. **1** до т. **2** (фиг. 5), на тялото действат няколко сили – силата, която го издига, силата на тежестта, силата на триене и силата на реакция на опората. Ние ще се интересуваме от работата на силата на тежестта и силата на триене. И двете сили са постоянни по големина и посока и можем да приложим формулата за работа на постоянна сила:

$A_s = \left|\vec{F}_s\right|\left|\vec{\Delta r}\right|\cos\pi = -kNl = -kGl\sin\alpha$ – за силата на триене;

(7) $A_g = \left|\vec{G}\right|\left|\vec{\Delta r}\right|\cos\left(\pi-\alpha\right) = -Gl\cos\alpha$ – за силата на тежестта.

Ако върнем тялото обратно в началното му положение в т. **1**, работата на силата на триене ще бъде същата, защото силата и преместването пак ще сключват ъгъл π rad (силата на триене е винаги в посока противоположна на движението), докато работата на силата на тежестта ще бъде с обратен знак (защото ъгълът между посоката на силата и посоката на преместването в този случай ще бъде α). Следователно работата, извършена от силата на триене по затворения контур **1–2–1** ще бъде $-2kG\sin\alpha$, докато работата на силата на тежестта ще бъде **0**, т.е. работата на силата на тежестта не зависи от изминатия път, а само от преместването (началното и крайното положение на тялото). Такива сили, чиято работа не зависи от изминатия път, а само от началното и крайното положение на тялото, се наричат консервативни (или потенциални) сили. Силата на тежестта е пример за консервативна сила, силата на триене – за неконсервативна.

Това разсъждение е валидно и за произволна консервативна сила (фиг. 6). При преместване на тялото от т. **1** до т. **2** по траектория *a* (под действие на всички сили приложени към тялото), консервативната сила $\vec{F}$ ще извърши работа $A_{1\text{-}a\text{-}2}$, а по траектория *b* – $A_{1\text{–}b\text{–}2}$. Тъй като работата на консервативната сила не трябва да зависи от траекторията:



фиг. 6

$A_{1-a-2} = A_{1-b-2}$;

$A_{1-b-2} = -A_{2-b-1}$;

$A_{1-a-2-b-1} = A_{1-a-2} + A_{2-b-1} = A_{1-a-2} - A_{1-b-2} = 0$.

Работата на произволна сила по затворен контур може да се изрази математически чрез интеграл по затворения контур L (**1–*a*–2–*b*–1**):

$$A = \oint_L \vec{F}.\vec{dr},$$

т.е. математически условието за консервативност на една сила $\vec{F}$ ще бъде:

$$A = \oint_L \vec{F}.\vec{dr} = 0$$

Виенско колело …

Силово поле, в което действат консервативни (потенциални) сили, се нарича потенциално поле. Всички тела, които се намират в потенциално поле, притежават определен вид енергия, която се нарича потенциална енергия U. Тя е скаларна величина и е свързана с взаимното разположение на телата, които си взаимодействат (с консервативни сили), и зависи от техните координати (радиус-вектори), т.е. U е функция на координатите в избраната отправна система – $U\left(\vec{r}\right) = U\left(x,y,z\right)$. Следователно потенциална енергия на дадено тяло винаги е свързана с другите тела, с които то взаимодейства. Не можем да говорим за потенциална енергия на изолирано (свободно) тяло. Доколкото U зависи от $\vec{r}$, т.е. от отправната система, нейното определяне също е нееднозначно, но промяната ѝ (което всъщност ни интересува) не зависи от отправната система. Обикновено се приема, че потенциалната енергия е **0** на някакво място и стойността ѝ се отчита спрямо това място. За движение на тела близо до Земята за такова място най-често се приема земната повърхност.

Нека сега се опитаме да определим връзката между работата на консервативната сила и потенциалната енергия на тялото. Изменението на потенциалната енергия ΔU (както и на всички видове енергия) е свързана с извършване на работа. Тъй като U се определя от взаимодействие на телата чрез консервативни сили, тази работа се извършва от действащата консервативна сила. Тъй като работата е мярка за изменението на енергията, колкото повече се променя потенциалната енергия, толкова по-голяма работа трябва да може да извърши консервативната сила, т.е. извършената работа A по големина трябва да е равна на промяната на потенциалната енергия ΔU. Остава да определим знака на извършената работа (тя е алгебрична величина и може да бъде както положителна, така и отрицателна). Ще го направим на базата на пример със сила, която показахме, че е консервативна – силата на тежестта $\vec{G}$. Ако едно тяло пада свободно от височина h, работата на $\vec{G}$ ще бъде толкова по-голяма, колкото по голяма е h. Следователно колкото е по-голяма височината над земната повърхност, на която е издигнато тялото, толкова по-голяма ще бъде и потенциалната му енергия. Ако тялото се премества от височина h_1 до височина h_2 ($h_2<h_1$), силата на тежестта ще извърши работа (7):

(8) $A = G\left|\overrightarrow{\Delta r}\right| = G\left(h_1 - h_2\right) > 0$,

тъй като силата и преместването са еднопосочни ($\cos\alpha=1$), а големината на преместването $\left|\overrightarrow{\Delta r}\right| = h_1 - h_2$ ($\left|\overrightarrow{\Delta r}\right|$ трябва да е положителна величина). При това преместване обаче, потенциалната енергия на тялото намалява, защото намалява височината над земната повърхност. Следователно при извършване на положителна работа от консервативната сила, потенциалната енергия на тялото намалява и обратно – ако работата на консервативната сила е отрицателна (при издигане на тялото силата на тежестта и преместването са противопосочни, $\cos\alpha=-1$, $A<0$), потенциалната енергия на тялото се увеличава. Такава връзка съществува не само за силата на тежестта, а и за всяка консервативна сила и може да се запише като:

(9) $A = -\Delta U$,

т.е. работата на консервативната сила е равна на взетата със знак минус промяна на потенциалната енергия на тялото. С други думи консервативната сила върши работа за сметка на потенциалната енергия на тялото. От (9) се вижда, че потенциалната енергия, също както работата, се измерва в джаули. За много малко преместване $\overrightarrow{dr}$, (9) може да се запише като:

(10) $dA = -dU$.

В конкретния пример, който разгледахме, за потенциалната енергия на тяло в полето на силата на тежестта (като примем за нулево потенциално ниво земната повърхност) ще получим, че тяло, намиращо се на височина h над земната повърхност, притежава потенциална енергия, която е равна на взетата със знак минус работа на силата на тежестта при издигането му до тази височина. От (7), (8) и (3):

$$\Delta U = U(h) - U(0) = -A = -G(h-0)\cos\pi = Gh = mgh,$$

$$U(h) = mgh.$$

Като използваме (10) и определението за работа на сила, можем да намерим връзка и между потенциалната енергия на тялото и самата консервативна сила:

$$dA = \vec{F}.\overrightarrow{dr} = -dU$$

(11) $\vec{F} = -gradU$

Символът „*grad*” изразява векторна математическа функция, наречена градиент и представлява производна на скаларна величина по радиус-вектора $\vec{r}$. Физическият смисъл на (11) е, че големината на консервативната сила се дава от промяната на потенциалната енергия на тялото с преместването, а посоката ѝ е в посока на намаляване на потенциалната енергия.

Закон за изменение и запазване на пълната механична енергия

Видяхме, че едно тяло може да притежава два вида механична енергия – кинетична T и потенциална U. Сумата от кинетичната и потенциалната енергия на едно тяло $E=T+U$ се нарича пълна механична енергия на тялото. Тъй като е сума от енергии, мерната ѝ единица също е джаул. Енергията, както казахме, е адитивна величина и следователно пълната механична енергия на механична система от тела ще бъде равна на сумата от пълните механични енергии на отделните тела:

(12) $E = \sum_{i=1}^{n} E_i = \sum_{i=1}^{n} \left(T_i + U_i\right).$

ВЕЦ, махало …

Нека да видим по какъв начин може да се променя пълната механична енергия на една механична система. Казахме, че всяка промяна на енергията е свързана с извършване на работа, а следователно и с действие на сили. Ако имаме една произволна механична система, в нея трябва да действат няколко вида сили – вътрешни и външни, консервативни и неконсервативни. Поне една от вътрешните сили трябва да е консервативна, за да може телата да притежават потенциална енергия. Ако всички вътрешни сили са консервативни, системата се нарича консервативна. Под действие на всички сили, всяко от телата в системата получава някакво ускорение $\vec{a_i}$ (втори принцип на Нютон):

(13) $$\begin{gathered} \vec{a_i} = \frac{1}{m_i}\left(\vec{f_{i\text{вк}}} + \vec{f_{i\text{вн}}} + \vec{F_i}\right) \\ m_i \vec{a_i} = \left(\vec{f_{i\text{вк}}} + \vec{f_{i\text{вн}}} + \vec{F_i}\right) \end{gathered},$$

където с $\vec{f_{i\text{вк}}}$ и $\vec{f_{i\text{вн}}}$ сме означили съответно равнодействащите на вътрешните консервативни и неконсервативни сили, а с $\vec{F_i}$ – равнодействащата на външните сили, действащи на тялото с номер i. За да определим промяната на енергията на тялото, трябва да пресметнем работата, която извършват всички сили върху него. Затова умножаваме скаларно второто равенство от (13) с безкрайно малкото преместване на тялото $\vec{dr_i}$, което то получава под действие на всички сили.

$$\begin{gathered} m_i \vec{a_i} = \left(\vec{f_{i\text{вк}}} + \vec{f_{i\text{вн}}} + \vec{F_i}\right) \quad |.\vec{dr_i} \\ m_i \vec{a_i}.\vec{dr_i} = \left(\vec{f_{i\text{вк}}} + \vec{f_{i\text{вн}}} + \vec{F_i}\right).\vec{dr_i} \end{gathered}.$$

Като използваме изводът, направен за нарастването на T ($dT=mvdv$), виждаме че, лявата част на равенството представлява безкрайно малкото нарастване на кинетичната енергия на тялото dT_i. От определението за работа на сила ($dA = \vec{F}.\vec{dr}$) и (10) следва че, дясната част на равенството е сума от работите dA_i на външните и $dA_{i\text{вн}}$ на неконсервативните сили и взетата със знак минус промяна на потенциалната енергия на тялото:

$$\begin{gathered} m_i v_i dv_i = \vec{f_{i\text{вк}}}.\vec{dr_i} + \vec{f_{i\text{вн}}}.\vec{dr_i} + \vec{F_i}.\vec{dr_i} \\ dT_i = -dU_i + dA_{i\text{вн}} + dA_i \end{gathered}.$$

Последното равенство може да се преобразува, за да получим изменението на пълната енергия E_i на тялото, а като използваме адитивността на работата и енергията и (12) – и на пълната енергия E на системата:

$$dT_i + dU_i = dA_{i\text{вн}} + dA_i$$

$$d\left(T_i + U_i\right) = dE_i = dA_{i\text{вн}} + dA_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} dE_i = \sum_{i=1}^{n} dA_{i\text{вн}} + \sum_{i=1}^{n} dA_i$$

$$d\sum_{i=1}^{n} E_i = d\sum_{i=1}^{n} A_{i\text{вн}} + d\sum_{i=1}^{n} A_i$$

(14) $dE = dA_{\text{вн}} + dA.$

Следователно, промяната на пълната механична енергия dE на една механична система е сума от работата $dA_{\text{вн}}$ на неконсервативните вътрешни сили и работата dA на външните сили, т.е. механичната енергия на една механична система може да се промени само ако ѝ действат външни или неконсервативни сили. Ако системата е затворена (не действат външни сили) и консервативна (няма вътрешни неконсервативни сили), то и работата на външните и неконсервативни сили ще бъде нула, а механичната енергия на системата няма да се променя:

(15) $dE = 0 \quad E = \text{const}.$

Тези равенства (15) изразяват закона за запазване на пълната механична енергия: Пълната механична енергия на затворена консервативна система не се променя с времето.

Законът за запазване на пълната механична енергия е частен случай на по-общия закон за запазване на енергията. Видяхме, че ако в системата действат неконсервативни сили, част от механичната енергия се преобразува чрез работата на тези сили. Тази енергия обаче не се губи, ако системата е затворена (не действат външни сили), а се преобразува в друг вид енергия на системата (най-често в топлинна или електрична, под действие на силите на триене и съпротивление). Така можем да формулираме общия закон за запазване на енергията: Пълната енергия (сумата от всички видове енергии) на затворена система не се променя с времето.