Векторно представяне на хармонично трептене. Събиране на хармонични трептения с еднакво направление. Биене

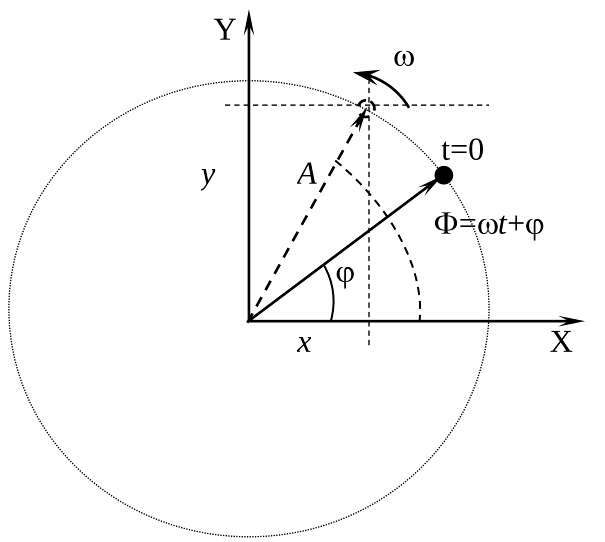
Векторно представяне на хармонично трептене

В много случаи е по-удобно да използваме т.нар. векторно представяне на едно хармонично трептене. Нека да разгледаме равномерно движение, с ъглова скорост **ω**, на материална точка по окръжност с радиус ***A*** (фиг. 1). Началната ъглова координата на точката (ъгълът спрямо оста **X** в момента ***t*=0**) е **φ**. За някакъв интервал от време ***t***, материалната точка ще се завърти на ъгъл **Δφ=ω*t*** и ъгловата ѝ координата ще стане **Φ=Δφ+φ=ω*t*+φ**. Ако построим радиус-вектора от началото на координатната система до точката виждаме, че той се върти около началото на координатната система със същата ъглова скорост **ω** както материалната точка, а големината му е равна на радиуса на окръжността ***A***. Проекциите на този радиус-вектор върху координатните оси **X** и **Y** във всеки момент от време ***t*** са:

$$x = A\cos\Phi = A\cos\left(\omega t + \varphi\right) \text{ и}$$

$$y = A\sin\Phi = A\sin\left(\omega t + \varphi\right),$$

т.е. те имат същия вид, както уравнението на движение на хармонично трептене. Следователно можем да представим хармоничното трептене чрез проекцията на радиус-вектор (с големина, равна на амплитудата ***A*** на трептенето), с начало в равновесното положение на трептящата точка, въртящ се с ъглова скорост **ω**, равна на кръговата честота на трептенето и начална ъглова координата **φ**, равна на началната фаза на трептенето. Това векторно представяне е много удобно, особено при събиране на трептения с еднакво направление.



фиг. 1

Събиране на хармонични трептения с еднакво направление

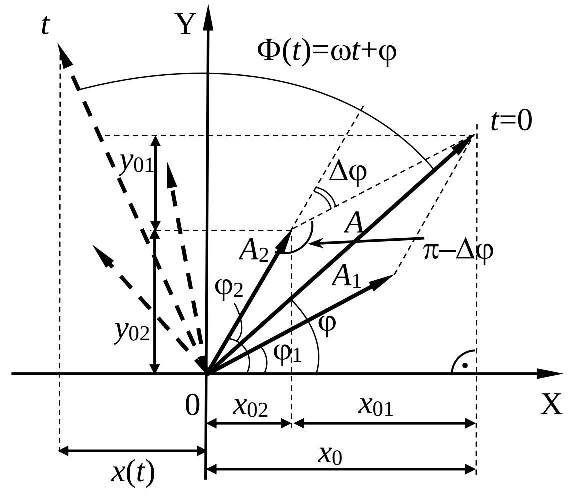
Дотук разгледахме най-простия вид трептене – хармонично трептене предизвикано от една възвръщаща сила. В много случаи на трептящото тяло могат да действат няколко сили. Като имаме предвид принципа на суперпозицията, можем да разглеждаме действието на тези сили независимо една от друга и да получим равнодействащата като векторна сума на всички действащи сили. По същия начин можем да постъпим и с резултата от действието на силите – в случая това са независими трептения, в които участва тялото под действие на тези сили. Като имаме предвид векторното представяне на хармоничното трептене, можем да приложим принципа на суперпозицията и за тях, т.е. резултантното трептене ще получим като векторна сума от векторите на отделните трептения.

Ще разгледаме първо най-простият случай – тяло (материална точка) участва в две трептения с еднаква кръгова честота **ω** (а следователно и с еднаква честота и период) в едно направление – по избраната ос **X**:

$$x_1 = A_1\cos\left(\omega t + \varphi_1\right) \text{ и}$$

$$x_2 = A_2\cos\left(\omega t + \varphi_2\right).$$

Ще използваме векторното представяне на трептенията – в този случай (фиг. 2) двата радиус-вектора, чиито проекции по оста **X** изобразяват трептенията, имат различни дължини (равни на амплитудите на двете трептения ***A*₁** и ***A*₂**) и различно положение спрямо оста **X** в началния момент (началните фази на трептенията **φ₁** и **φ₂**). Тъй като двата вектора се въртят с еднаква ъглова скорост **ω**, ъгълът между тях, който е равен на фазовата разлика **ΔΦ=Φ₂–Φ₁** между трептенията остава постоянен:



фиг. 2

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = \left(\omega t + \varphi_2\right) - \left(\omega t + \varphi_1\right) = \varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi = \text{const},$$

т.е. фазовата разлика между трептенията във всеки момент от време е равна на фазовата разлика между тях в началния момент.

Радиус-векторът на резултантното трептене (сумата от двете трептения) ще получим като векторна сума на радиус-векторите на двете трептения, а неговата проекция върху оста **X** ще ни даде уравнението на движение на трептенето:

(1) $x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega t + \varphi)$.

Тъй като ъгловата скорост на въртене на двата вектора е еднаква, ъгловата скорост на тяхната сума (кръговата честота на резултантното трептене) също ще бъде $\boldsymbol{\omega}$. Следователно, за да намерим уравнението на резултантното трептене, трябва да определим само амплитудата $\boldsymbol{A}$ и началната фаза $\boldsymbol{\varphi}$. От фиг. 2 се вижда, че амплитудата $\boldsymbol{A}$ (от правилото за събиране на вектори) е:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos(\pi - \Delta\varphi)} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi},$$

а за началната фаза $\boldsymbol{\varphi}$ ще получим:

$$\tan\varphi = \frac{y_{01} + y_{02}}{x_{01} + x_{02}} = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}.$$

$$\varphi = \arctan\frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

Така уравнението на движение (1) придобива вида:

$$x = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi}\,\cos\left(\omega t + \arctan\frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}\right).$$

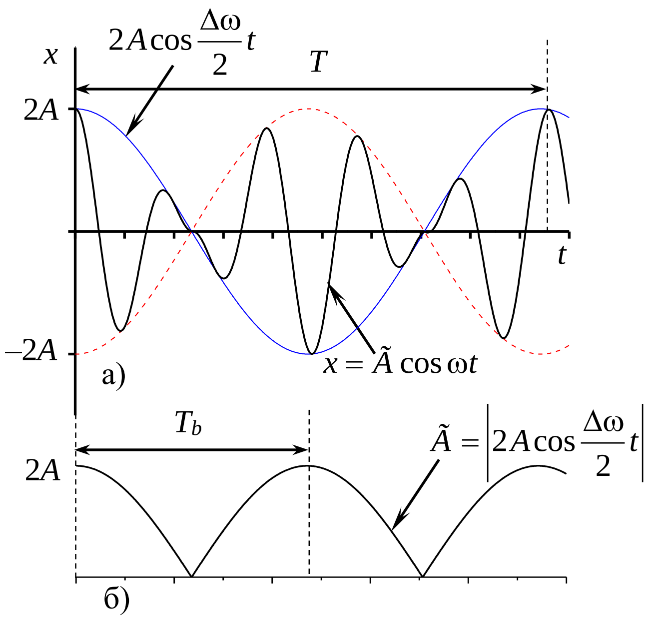
Следователно, когато събираме хармонични трептения с еднакви честоти в едно направление, резултантното трептене също е хармонично трептене, със същата честота, а амплитудата и началната му фаза зависят от амплитудите и началните фази на всички трептения. Векторното представяне на хармоничните трептения ни позволява да събираме и повече трептения в едно направление – прибавяме ги последователно, както процедираме с векторите. Резултантното трептене винаги е в същото направление, както съставящите го.

Биене

Ако двете трептения не са с еднакви честоти, но двете честоти са много близки, $\boldsymbol{\omega_1 \approx \omega_2 = \omega}$, се наблюдава едно интересно явление с голямо приложение – биене. Ще разгледаме най-простият случай на биене, когато двете трептения имат еднакви амплитуди $\boldsymbol{A}$, началните им фази са равни на **0** и се извършват в еднакво направление. Уравненията на движение на двете трептения в този случай са:

$$x_1 = A\cos\omega_1 t$$

$$x_2 = A\cos\omega_2 t$$



фиг. 3

и за резултантното трептене ще получим:

$$x = x_1 + x_2 = A\cos\omega_1 t + A\cos\omega_2 t = 2A\cos\frac{(\omega_2 - \omega_1)}{2}t\cos\frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2}t = \left(2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos\omega t.$$

Тъй като $\frac{\Delta\omega}{2} \ll \omega$, изразът в скобите се променя много по-бавно от $\cos\omega t$ и можем да го считаме за променлива амплитуда на хармонично трептене с кръгова честота $\boldsymbol{\omega}$. От друга страна този израз може да бъде отрицателен при определени стойности на $\boldsymbol{t}$, т.е. не може да бъде амплитуда на трептене, тъй като амплитудата е винаги положителна величина. Тогава можем да разглеждаме абсолютната стойност на израза като променлива амплитуда $\tilde{A}$:

(2) $\tilde{A} = \left|2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\right|$

и уравнението на движение ще придобие вида:

(3) $x = A\cos\omega t$.

Графиките на уравнението на движение (3) и амплитудата $\tilde{A}$ (2) са показани на фиг. 3. Вижда се (фиг. 3б), че периодът на променливата амплитуда (2) е два пъти по-малък (съответно честотата е два пъти по-голяма) отколкото периодът $\boldsymbol{T}$ на хармоничното трептене $2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t$ (фиг. 3а), т.е. периодът на биене $\boldsymbol{T_b}$ (периодът на променливата амплитуда) ще бъде:

$$T_b = \frac{1}{2}T = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{\frac{\Delta\omega}{2}} = \frac{2\pi}{\Delta\omega},$$

а честотата на биене:

$$f_b = \frac{1}{T_b} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi} = f_2 - f_1.$$

Явлението биене намира широко приложение в практиката когато е необходима фина настройка на дадена честота, напр. при настройване на музикални инструменти.