

Връзка между линейни и ъглови кинематични величини. Движение по окръжност с постоянно ускорение – основни закони

Връзка между линейни и ъглови кинематични величини

След като дефинирахме основните кинематични величини при въртеливи движения, можем да потърсим връзка между тях и дефинираните по-рано линейни величини. Видяхме, че законите за движение и скоростта при равномерно движение по окръжност имат същия вид, както и при равномерно праволинейно движение, т.е. ние можем да получим тези закони само чрез замяна на съответните линейни величини с ъглови. Следователно, при движение по окръжност връзките между линейните и ъгловите величини са съвсем прости. Затова ще използваме пак движението по окръжност при получаването им. За допълнително опростяване на математическите изводи, първо ще търсим връзките между големините на съответните вектори, а след това и между посоките им.

Нека първо да намерим връзката между големините на преместването $dr = |\vec{dr}|$ и ъгъла на завъртане $d\varphi$ за физически малкия интервал от време dt при движение на материална точка по окръжност с радиус R (фиг. 1), като имаме предвид, че векторът $\vec{dr}$ е насочен по допирателната и следователно е перпендикулярен на радиуса R :

$$(1) \frac{dr}{R} = \tan d\varphi \approx \sin d\varphi \approx d\varphi,$$

$$dr = R d\varphi$$

тъй като за малкия интервал от време dt , $d\varphi \rightarrow 0$ а от математическия анализ знаем, че:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \Rightarrow \sin x \approx \tan x \approx x.$$

След като намерихме връзката между преместването dr и ъгъла на завъртане $d\varphi$, можем да използваме определенията за линейна и ъглова скорост за да намерим връзката между тях:

$$(2) v = \frac{dr}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt}, \quad v = R\omega.$$

Както виждаме, връзката отново както в (1) се дава чрез радиуса R на окръжността. Това е характерно за всички връзки между линейните и ъгловите величини при движение по окръжност. Ще го видим и при представянето на ускорението – тангенциално и нормално – чрез ъглови величини.

Тъй като при равнопроменливите праволинейни движения пълното ускорение е равно на тангенциалното, можем да определим големината на тангенциалното ускорение:

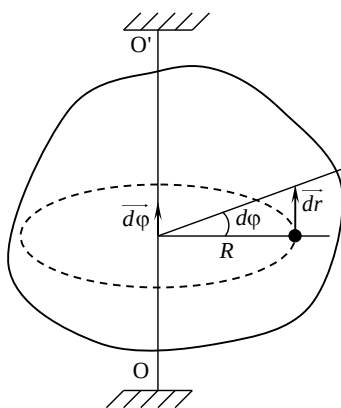
$$(3) a_t = a = \frac{dv}{dt}.$$

Големината на $\vec{a}_t$ е равна на промяната на големината на скоростта.

Като заместим (2) в (3) ще получим връзката между големините на тангенциалното ускорение a_t и ъгловото ускорение α :

$$(4) a_t = R \frac{d\omega}{dt} = R\alpha.$$

За да определим големината на нормалното ускорение ще разгледаме равномерното движение по окръжност със скорост $\vec{v}$ на една материална точка (фиг. 2). Както знаем, при равномерно движение скоростта не се променя по големина – тангенциалното ускорение е нула. Тъй като движението е криволинейно, нормалното ускорение трябва да е различно от нула. Следователно пълното ускорение $\vec{a}$ в този случай е равно на нормалното $\vec{a}_n$. Това ни дава възможност да определим големината на нормалното ускорение a_n , като определим големината на пълното ускорение a .



фиг. 1

Commented [И1]: Връзка между линейна и ъглова скорост

Commented [И2]: Връзка между тангенциалното и ъгловото ускорение

Големината на пълното ускорение на материалната точка при това равномерно движение по окръжност (фиг. 2) можем да определим като намерим компонентите му по осите **X** и **Y** и използваме формулата:

$$(5) \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

За да намерим компонентите на ускорението ни трябва компонентите на скоростта v_x и v_y , тъй като

$$a_x = \frac{dv_x}{dt},$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt}.$$

Големините на проекциите $\vec{v}_x$ и $\vec{v}_y$ са съответно

$$v_x = v \sin \varphi$$

$$v_y = v \cos \varphi.$$

Ъгълът φ е ъгловата координата на точката (ъгълът, на който се е завъртяла за определено време t) и следователно зависи от времето t . Големината на скоростта v обаче, не зависи от времето (движението е равномерно). Тогава:

$$(6) \quad \begin{aligned} a_x &= v \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} = v\omega \cos \varphi \\ a_y &= -v \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} = -v\omega \sin \varphi \end{aligned},$$

тъй като производната на ъгъла φ по времето е големината на ъгловата скорост ω . Като заместим получените стойности за a_x и a_y от (6) в (5) окончателно получаваме:

$$(7) \quad \begin{aligned} a &= \sqrt{v^2 \omega^2 \cos^2 \varphi + v^2 \omega^2 \sin^2 \varphi} = v\omega \\ a &= a_n = v\omega \end{aligned}.$$

Тъй като v и ω са константи, то и нормалното ускорение при равномерно движение по окръжност е постоянно. Формула (7) е валидна не само за равномерно движение по окръжност, а за произволно криволинейно движение, но тогава v и ω няма да са константи – те може да се променят с времето. В такъв случай и нормалното ускорение няма да е постоянно, а ще зависи от времето – $a_n = f(t)$.

Като използваме (2), можем да получим големината на нормалното ускорение a_n във вид, подобен на (1), (2) и (4) (чрез радиуса на окръжността):

$$(8) \quad a_n = v\omega = \frac{v^2}{R} = R\omega^2.$$

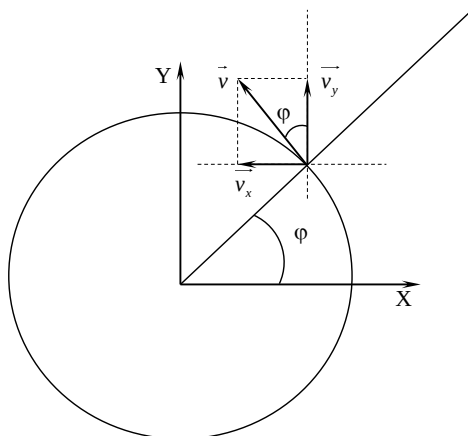
За да определим връзките между посоките на векторите на линейните и ъгловите величини, трябва да си припомним определението за векторно произведение на два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Това е вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, перпендикулярен и на двата вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а големината му е:

$$\begin{aligned} |\vec{c}| &= |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \beta, \\ c &= ab \sin \beta \end{aligned},$$

където β е ъгълът, който сключват двата вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Важно свойство на векторното произведение е, че ако разменим местата на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ или сменим посоката на единия от тях, то променя посоката си на противоположната:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= -\vec{b} \times \vec{a} \\ \vec{a} \times \vec{b} &= -(-\vec{a}) \times \vec{b}, \end{aligned}$$

т.е. то има свойства на аксиален вектор и затова е подходящо за описание на ъгловите величини, които също са аксиални вектори.



фиг. 2

Commented [И3]: Различни изрази за нормалното ускорение

Трябва още да въведем и един вектор свързан с радиуса на окръжността – $\vec{R}$. Големината му е равна на радиуса R , а посоката му е от оста на въртене към материалната точка, която се върти. Тогава, като се има предвид, че $\vec{d\varphi} \perp \vec{R}$ (фиг. 1), (1) може да се представи като:

$$dr = R d\varphi \sin \frac{\pi}{2}.$$

$$\vec{dr} = \vec{d\varphi} \times \vec{R}$$

Тъй като ъгловата скорост $\vec{\omega}$ е насочена по посока на $\vec{d\varphi}$ (по оста на въртене, перпендикулярно на равнината на въртене), а линейната скорост $\vec{v}$ – по посока на $\vec{dr}$ (перпендикулярно на $\vec{R}$ и $\vec{\omega}$), ъгълът между векторите $\vec{R}$ и $\vec{\omega}$ също е $\pi/2$ и можем да представим (2) като:

$$v = R\omega \sin \frac{\pi}{2};$$

$$(9) \quad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}.$$

Аналогична връзка се получава за тангенциалното ускорение $\vec{a}_t$ ($\vec{a}_t \perp \vec{R}$, $\vec{a}_t \perp \vec{\alpha}$, $\vec{\alpha} \perp \vec{R}$) от (4):

$$a_t = R\alpha \sin \frac{\pi}{2}.$$

$$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{R}$$

За нормалното ускорение $\vec{a}_n$ връзката е малко по-сложна – чрез двойно векторно произведение, но като се има предвид, че $\vec{v} \perp \vec{\omega}$, се получава лесно от (8) и (9):

$$a_n = v\omega \sin \frac{\pi}{2}.$$

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{R}]$$

Движение по окръжност с постоянно ускорение – основни закони

Видяхме, че законите за движение и скоростта при равномерно движение по окръжност са аналогични на тези за равномерно праволинейно движение (след замяна на линейните величини с ъглови). По същия начин могат да се получат и законите за движение и скоростта за равнопроменливо движения по окръжност. Те могат да се получат от графиките на законите (фиг. 3, 4 и 5 от 3 въпрос и разсъжденията към тях, като се заменят $x \rightarrow \varphi$, $\Delta x \rightarrow \Delta \varphi$, $v \rightarrow \omega$, $a \rightarrow \alpha$). Законите могат да се получат и аналитично, чрез интегриране на определенията за ъглова скорост и ъглово ускорение:

$$\alpha = \pm \frac{d\omega}{dt}, d\omega = \pm \alpha dt, \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \pm \alpha \int_0^t dt, \omega|_{\omega_0}^{\omega} = \pm \alpha t|_0^t, \omega - \omega_0 = \pm \alpha t;$$

$$\omega = \omega_0 \pm \alpha t \quad (\text{закон за скоростта}) \text{ и}$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, d\varphi = \omega dt, \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t \omega dt = \int_0^t (\omega_0 \pm \alpha t) dt = \omega_0 \int_0^t dt \pm \alpha \int_0^t t dt;$$

$$\varphi|_{\varphi_0}^{\varphi} = \omega_0 t|_0^t \pm \frac{1}{2} \alpha t^2|_0^t, \varphi - \varphi_0 = \Delta \varphi = \omega_0 t \pm \frac{1}{2} \alpha t^2;$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \pm \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad (\text{закон за движение}).$$

Commented [И4]: Векторна връзка между линейна и ъглова скорост

Commented [И5]: Закон за скоростта (ъгловата скорост) при равнопроменливо движение по окръжност

Commented [И6]: Закон за движение при равнопроменливо движение по окръжност