Консервативност на електростатичното поле. Работа на електростатични сили в електростатично поле. Потенциална енергия. Потенциал. Еквипотенциални повърхнини. Връзка между интензитет и потенциал. Циркулация на вектора на интензитета на електростатично поле

Консервативност на електростатичното поле. Работа на електростатични сили в електростатично поле. Потенциална енергия

Ако сравним законите на Нютон за всеобщото привличане и на Кулон за взаимодействие между неподвижни точкови заряди, виждаме, че те имат еднакъв вид – и двете сили зависят правопропорционално от една постоянна характеристика на телата (маса или заряд) и обратно пропорционално на разстоянието между тях. Тъй като показахме, че гравитационната сила (в частния случай на силата на тежестта) е консервативна и за нея може да се въведе потенциална енергия, естествено е да предположим, че електростатичната сила също трябва да бъде консервативна. От условието за консервативност на една сила:

(1) $\oint\limits_L \vec{F}.\vec{dr} = 0$

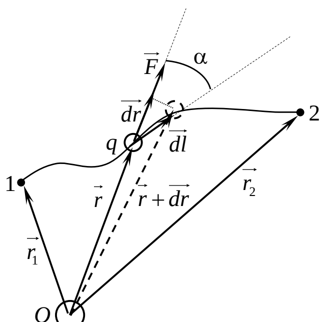
се вижда, че ако две сили зависят по еднакъв начин от радиус-вектора $\vec{r}$, интегралът ще има еднакъв вид т.е. ако условието (1) е изпълнено за едната сила, то ще бъде изпълнено и за другата. Условието (1) означава още, че работата на консервативната сила зависи само от началното и крайното положение на тялото – т.е. работата $\boldsymbol{A_{12}}$ на силата между точки с радиус-вектори $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ се дава само от взетата със знак минус разлика в стойностите на една функция, която зависи само от местоположението на тялото (която нарекохме потенциална енергия). Ако електростатичното поле е консервативно (потенциално), можем да намерим тази функция на местоположението – потенциална енергия, като пресметнем работата на електростатичните сили при преместване на заряд между две точки от полето.

Нека да пресметнем работата, извършена от електростатичните сили при преместване на положителен точков заряд $\boldsymbol{q}$ в полето на друг положителен точков заряд $\boldsymbol{Q}$, което сме поставили в началото на отправната система (фиг. 1). В **т. 1** зарядът $\boldsymbol{q}$ има радиус-вектор $\vec{r}_1$, а в **т. 2** – $\vec{r}_2$. Тъй като преместването се извършва по произволна траектория, ще пресметнем работата, извършена за малкото преместване $\vec{dl}$ по траекторията между точките с радиус-вектори $\vec{r}$ и $\vec{r}+\vec{dr}$, ще го свържем с промяната на радиус-вектора $\vec{dr}$ в така избраната отправна система и ще пресметнем работата $\boldsymbol{A_{12}}$ на електростатичната сила по цялата траектория чрез интегриране (формулата за работа на променлива сила).

$$dA = \vec{F}.\vec{dl} = Fdl\cos\alpha = Fdr$$

$$A_{12} = \int\limits_1^2 dA = \int\limits_{r_1}^{r_2} Fdr = kqQ\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} =$$

$$= -kqQ\frac{1}{r}\Bigg|_{r_1}^{r_2} = -\left(k\frac{qQ}{r_2} - k\frac{qQ}{r_1}\right)$$



фиг. 1

Тъй като $\vec{dl}$ е много малък, векторите $\vec{r}$ и $\vec{r}+\vec{dr}$ са почти еднопосочни и затова $\boldsymbol{dr=dl\cos\alpha}$. Виждаме, че работата на електростатичната сила зависи само от взетата със знак минус разлика в стойностите на една функция на разстоянието от типа:

(2) $U(r) = k\dfrac{qQ}{r}$

в точките 1 и 2. Т.е.:

(3) $A_{12} = -\big(U(r_2) - U(r_1)\big) = -\Delta U(r)$.

Получихме същата връзка между $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{U}$, както в механиката. Това ни дава основание да наречем скаларната величина $\boldsymbol{U}$, определена с (2), потенциална енергия на точковия заряд $\boldsymbol{q}$ в полето на точковия заряд $\boldsymbol{Q}$. Определената от (2) потенциална енергия (също както и в механиката) е взаимна потенциална енергия – това е потенциалната енергия на всеки от двата заряда в полето на другия.

От (2) се вижда още, че при $\boldsymbol{r\to\infty}$, $\boldsymbol{U(r)\to 0}$, т.е. колкото по-далеч от източника на електростатичното поле се намира даден заряд, толкова по-малка ще бъде потенциалната му енергия спрямо този източник

Commented [I1]: Потенциална енергия на точков заряд – формула

Commented [I2]: Потенциална енергия на точков заряд – определение или толкова по-слабо ще му влияе даденото поле. Обратно, с приближаването на заряда към източника на полето потенциалната му енергия нараства. Важно е да се отбележи още, че потенциалната енергия зависи от знаците на двата електрични заряда. За разноименни заряди $\boldsymbol{U(r)<0}$, а за едноименни $\boldsymbol{U(r)>0}$.

Потенциал. Еквипотенциални повърхнини. Връзка между интензитет и потенциал

Потенциалната енергия, също както силата, е характеристика на взаимодействието т.е. тя зависи и от двата заряда. За да получим характеристика на полето, която не зависи от пробния заряд, който внасяме в него, можем да постъпим както при въвеждането на другата, силова, характеристика на полето – интензитета $\vec{E}$. Ако разделим потенциалната енергия $\boldsymbol{U}$ на пробния заряд $\boldsymbol{q}$, ще получим нова, енергетична характеристика на полето, която не зависи от това, дали в дадената точка има пробен заряд или не:

(4) $$\frac{U}{q} = k\frac{Q}{r} = \varphi.$$

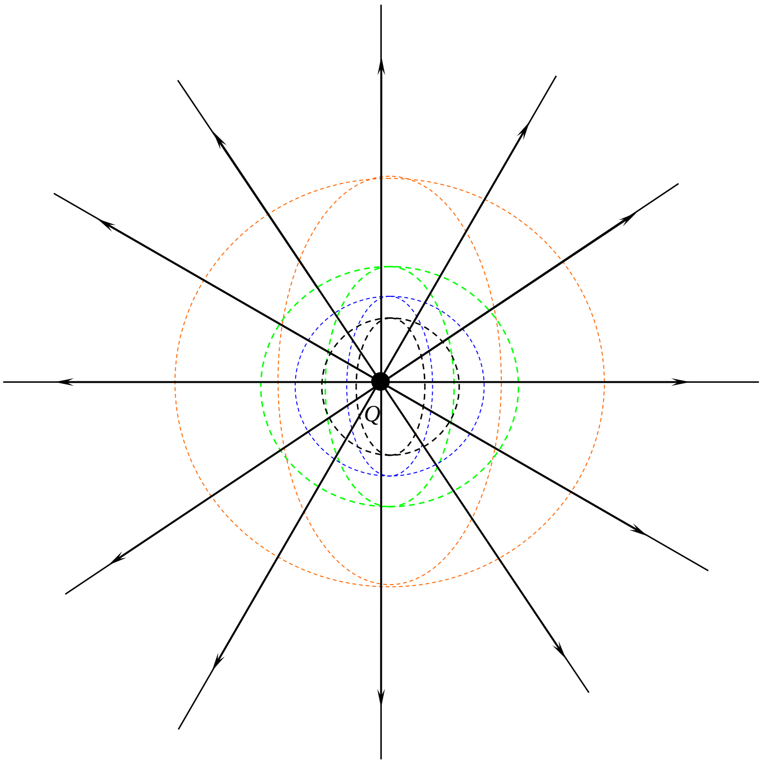
Commented [I3]: Потенциал – формула

Величината **φ** се нарича потенциал на електростатичното поле на разстояние ***r*** от точковия заряд ***Q*** и се определя от потенциалната енергия на единичен положителен заряд, поставен на това разстояние от заряда ***Q***. От определението (4) следва, че потенциалът **φ** в дадена точка на полето, също както интензитета $\vec{E}$, зависи само от големината на заряда и от разстоянието до точката (ако зарядът, създаващ полето, не е точков, потенциалът и интензитетът може да зависят и от пространственото разпределение на зарядите). Мерната единица за потенциал е волт [**V**]. От (4) се вижда връзката с досега въведените величини – **1V=1J/1C**.

Commented [I4]: Потенциал – определение

Потенциалът (енергетична), както и интензитетът (силова), е характеристика само на полето и не зависи от това какъв заряд има в тази точка (за разлика от силата и потенциалната енергия).

И потенциалът, както интензитета, може да се представи графично. За разлика от силовите линии на интензитета, тук използваме т.нар. еквипотенциални повърхнини – геометричното място от точки с еднакъв потенциал. Например за точков заряд с големина ***Q*** всяка сфера, която го огражда така, че той се намира в центъра ѝ, ще бъде еквипотенциална повърхнина (фиг. 2). Еквипотенциалните повърхнини в този случай са концентрични сфери. Силовите линии на интензитета, които са радиални прави, започващи от заряда ***Q***, са перпендикулярни на еквипотенциалните повърхнини във всяка точка. Тази връзка съществува не само за точков заряд – силовите линии на интензитета са перпендикулярни на еквипотенциалните повърхнини във всяка точка. Това лесно може да се покаже. При пренасяне на електрични заряди по еквипотенциални повърхнини не се извършва работа, тъй като (3):



фиг. 2

(5) $A_{12} = -\Delta U = -\left(q\varphi_2 - q\varphi_1\right) = -q\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) = 0$, тъй като **φ1=φ2**.

Това е възможно само ако във всеки момент от време силата (а следователно и интензитета) е перпендикулярна на преместването.

През всяка точка на електростатичното поле може да преминава само една еквипотенциална повърхнина и една силова линия на интензитета.

Между електростатичната сила и потенциалната енергия съществува връзка, също както в механиката. Тук обаче по-често се използват интензитета и потенциала на полето, а не силата и потенциалната енергия, затова ще дадем връзката между тях. Ще я получим от работата на електростатичната сила за малкото преместване $\vec{dr}$, изразена чрез интензитета и потенциала. От (5):

(6) $dA = -dU = -qd\varphi$,

а от дефиниционната формула за работа на сила и връзката между електростатичната сила и интензитета:

(7) $dA = \vec{F}.\vec{dr} = q\vec{E}.\vec{dr}$.

Като приравним десните части на (6) и (7) получаваме:

(8) $$\begin{aligned} -qd\varphi &= q\vec{E}.\vec{dr} \\ -d\varphi &= \vec{E}.\vec{dr} \end{aligned}.$$

Последното равенство може да се преобразува:

$\vec{E} = -grad\varphi$.

Най-често тази връзка се използва във вида:

(9) $E = -\dfrac{d\varphi}{dr}$ или $E = -\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta r}$.

Commented [I5]: Връзка между интензитета и потенциала – формула

Commented [I6]: Връзка между интензитета и потенциала – формула

Получената връзка между интензитета $\vec{E}$ и потециала **φ** на електростатичното поле (9) означава, че интензитетът на полето се определя от промяната на потенциала на единица разстояние. Знакът минус показва, че посоката на интензитета е в посока на намаляване на потенциала.

Циркулация на вектора на интензитета на електростатично поле

Нека да разгледаме по-подробно важното условие (1) за консервативност на дадено поле. Записано за електростатичното поле то ще има вида:

$$\oint_L \vec{F}.\vec{dr} = q\oint_L \vec{E}.\vec{dr} = 0$$

(10) $\oint_L \vec{E}.\vec{dr} = 0$.

Интегралът $\oint_L \vec{E}.\vec{dr}$ се нарича циркулация на вектора на интензитета $\vec{E}$ по затворения контур ***L*** и играе важна роля за определяне на типа на полето (а съответно и на силите, които действат в него). Поле, за което е изпълнено условието (10), се нарича потенциално или консервативно, т.е. за него може да се дефинира потенциал като еднозначна функция на полето (а следователно и потенциална енергия на заряд във всяка точка на това поле). Действително от (8) получаваме:

$$\int_1^2 \vec{E}.\vec{dr} = -\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = -\left(\varphi_2 - \varphi_1\right),$$

т.е. $\int_1^2 \vec{E}.\vec{dr}$ ни дава разликата в потенциалите на точките **1** и **2**. Ако вземем интеграла по затворена крива (т.е. циркулацията), точките **1** и **2** съвпадат и, ако потенциалът е еднозначна функция, трябва и потенциалите **φ1** и **φ2** в тези точки да съвпадат – циркулацията ще бъде нула. Ако циркулацията не е нула, не можем еднозначно да определим потенциал на полето – следователно полето не е потенциално. От (9) следва също, че силовите линии на електростатичното поле не могат да бъдат затворени линии – те винаги започват от заряди или безкрайност и завършват върху заряди или в безкрайност.