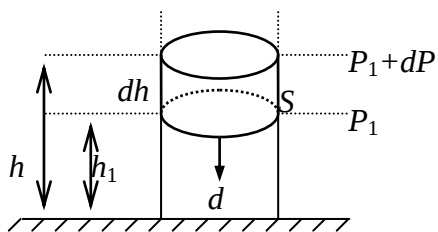


Закон на Болцман за разпределение на молекулите в потенциално поле.

Барометрична формула

Законът на Максвел за разпределение на молекулите по скорости е изведен теоретично за газ, на чиито молекули не действат външни сили. Ако обемът с газ, който разглеждаме, се намира в някакво силово поле (например гравитационно или електростатично), такива сили се появяват. Молекулите на газа при отсъствие на поле са разпределени равномерно по целия обем и се различават само по скоростите си. Действието на външно поле довежда до неравномерно разпределение на молекулите в пространството, заето от газа. В новото състояние частиците на газа ще се характеризират, от една страна, с разпределение по скорости, а от друга, с някакво разпределение в пространството, заемано от газа.

Ще разгледаме разпределението на въздушните молекули в земното гравитационно поле. Знаем, че газовите молекули имат свойството да запълват равномерно целия обем, който им се предостави. Защо тогава въздушните молекули не се разпръсват равномерно из цялото космическо пространство, а се задържат ниско над повърхността на Земята? Всички сме забелязали, че когато се изкачваме в планините, колкото по-високо е мястото, до което сме достигнали, толкова по-разреден е въздухът там. Разпределението на въздушните молекули се изменя с височината над земната повърхност. Причината за това са действащите около повърхността на Земята гравитационни сили.



фиг. 4

За да определим разпределението на въздушните молекули в гравитационното поле на Земята, ще разгледаме един вертикален въздушен стълб (фиг. 4). От този стълб избираме малък цилиндър с основа S и височина dh . Елементарният обем, съответстващ на цилиндъра, е $dV = Sdh$. Означаваме с n концентрацията на молекулите. Допускаме, че земното гравитационно поле е хомогенно ($g = \text{const}$), температурата T на въздуха е постоянна и масите m на всички молекули са еднакви ($m = \text{const}$). Разстоянието между долната основа на цилиндъра и земната повърхност означаваме с h_1 , а налягането,

съответстващо на h_1 – с P_1 . На височина $h_1 + dh$ налягането ще бъде $P_1 + dP$, като $dh > 0$, а $dP < 0$, тъй като с увеличаване на височината налягането намалява (налягането е свързано с концентрацията на молекулите, която с увеличаване на h намалява). Изменението на налягането dP , съответстващо на изменението на височината с dh , ще бъде:

$$P_1 - (P_1 + dP) = -dP = \frac{dF_n}{S}.$$

По дефиниция налягането се определя от нормалната сила, действаща върху единица площ. В случая нормалната сила се обуславя от силата на тежестта на въздушните молекули върху единица площ:

$$-dP = \frac{mnSdh}{S} g = mngdh,$$

където силата dF_n сме заместили с общата сила на тежестта на всички молекули, които се намират в елементарния обем dV . Знакът „-“ показва, че dh и dP винаги имат обратни знаци: когато h расте, P – намалява, и обратно. Като използваме основното уравнение на молекулно-кинетичната теория във вида $P = nkT$ за газа в този обем ще получим:

$$(1) \quad n = \frac{P}{kT}; \quad -dP = P \frac{mg}{kT} dh; \quad \frac{dP}{P} = -\frac{mg}{kT} dh.$$

Последното уравнение в (1) може да се интегрира спрямо налягането в граници от P_0 на морското равнище ($h = 0$) до P на височина h и спрямо височината в граници от 0 до h :

$$\int_{P_0}^P \frac{dP}{P} = -\frac{mg}{kT} \int_0^h dh; \quad \ln \frac{P}{P_0} = -\frac{mgh}{kT},$$

откъдето получаваме

$$(2) \quad \frac{P}{P_0} = e^{-\frac{mgh}{kT}}; \quad P(h) = P_0 e^{-\frac{mgh}{kT}},$$

където E_p е потенциалната енергия на една въздушна молекула в земното гравитационно поле. Получената зависимост (2) представлява барометричната формула, описваща изменението на налягането на въздуха в зависимост от височината h над земната повърхност. Тя показва, че налягането на въздуха се изменя по експоненциален закон с височината. Вижда се, че при $g = \text{const}$ атмосферното налягане намалява толкова по-бързо, колкото е по-тежък газът и по-ниска температурата му.

Ако използваме отново $P = nkT$ и заместим налягането P в (11) можем да видим и как се изменя концентрацията на въздушните молекули в гравитационното поле на Земята (приемаме, че на височина $h = 0$ концентрацията на молекулите е равна на n_0 , а на произволна височина $h \neq 0$ над земната повърхност концентрацията е n):

$$(3) \quad P = nkT; \quad P_0 = n_0 kT; \quad n(h) = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}} = n_0 e^{-\frac{E_p}{kT}}.$$

Получената зависимост (3) показва как се изменя концентрацията на въздушните молекули в гравитационното поле на Земята. Тя е в сила за всяко потенциално поле, в което действат консервативни сили, като E_p е потенциалната енергия на една частица в даденото потенциално поле. Зависимостта (3) се нарича *болцманово разпределение на молекулите в потенциално поле* или *закон на Болцман*.

Можем да получим разпределението на Болцман и като използваме фактора на Болцман (както получихме разпределението на Максвел по скорости). Може да се покаже, че разпределението на молекулите по скорости не влияе на концентрацията на молекулите, т.е. вероятността за осъществяване на дадено състояние с концентрация n зависи само от потенциалната енергия на една молекула $E_p = mgh$, следователно зависи само от височината h , на която се намира молекулата над земната повърхност: $n = n(h)$. В такъв случай вероятността (разпределението) за концентрацията на молекулите на височина h ще е пропорционална на фактора на Болцман:

$$n(h) \sim e^{-\frac{E_p}{kT}} = e^{-\frac{mgh}{kT}}$$

и тъй като имаме едномерно разпределение (за разлика от тримерното разпределение по скорости разгледано по-горе), това е пълната вероятност за осъществяване на даденото състояние (концентрация $n(h)$ на височина h). Следователно за разпределението (концентрацията) на молекулите на височина h ще получим:

$$n(h) = A e^{-\frac{mgh}{kT}},$$

където A е константа, която не зависи от височината h . Тази константа лесно може да се определи като имаме предвид, че концентрацията на молекулите на земната повърхност ($h = 0$) е $n(0) = n_0$:

$$n_0 = n(0) = A e^0 = A; \quad n(h) = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}} = n_0 e^{-\frac{E_p}{kT}}$$