

Уравнение на плоска хармонична вълна и сферична вълна

Уравнение на плоска хармонична вълна

Ще разгледаме по-подробно най-простият случай на разпространение на трептението – плоска хармонична напречна вълна, разпространяваща се в дадена посока (напр. оста **X** на избраната отправна система с отправно тяло – източника на трептения). Всяка точка, до която е достигнала вълната в даден момент ще започне да трепти по оста **Y**, перпендикулярна на **X**. Уравнението на вълната (уравнението на движение на всички частици от средата, до които е достигнала вълната) трябва да е функция не само на времето **t** (както при трептението), а и на разстоянието **x**, на което се намира дадена точка от източника на трептения (началото на координатната система) – $y=f(x,t)$. В този случай (плоска хармонична вълна), всички точки от средата, до които достига вълновият процес, повтарят трептенията на източника с известно закъснение, тъй като те се намират на различни разстояния от източника. Трептения им започват след различни интервали от време, които променят съответно фазите им (началната фаза на трептението на всяка точка зависи от разстоянието **x**), т.е. ако знаем уравнението на трептене на източника и скоростта **v** на разпространение на вълната, можем да получим уравнението на трептене на всяка точка от средата в даден момент от време – това е и уравнението на вълната.

Нека уравнението на трептене на източника (с координата $x=0$) да бъде $y(0,t) = A \sin(\omega t + \varphi)$. Точка от средата, която се намира на разстояние **x** от източника, ще започне да трепти след време $\tau = \frac{x}{v}$, т.е. трептението ще закъснява по фаза спрямо източника. Уравнението на трептене на тази точка ще бъде:

$$(1) \quad y(x,t) = A \sin\left(\omega\left(t - \tau\right) + \varphi\right) = A \sin\left(\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi\right) = A \sin\left(\omega t - \omega \frac{x}{v} + \varphi\right)$$

и като използваме определението за вълновото число получаваме

$$(2) \quad y(x,t) = A \sin(\omega t - kx + \varphi)$$

– уравнението на плоска хармонична вълна, разпространяваща се в положителната посока на избраната ос **X**. Ако вълната се разпространява в противоположната посока, скоростта на разпространение в (1) ще има противоположен знак и (2) ще придобие вида:

$$y(x,t) = A \sin(\omega t + kx + \varphi).$$

Така **общият вид на уравнението на плоска хармонична вълна ще бъде:**

$$y(x,t) = A \sin(\omega t \mp kx + \varphi),$$

където знакът "–" се отнася за разпространение на вълната в положителна посока на избраната ос **X**, а знакът "+" – за разпространение в противоположната посока.

Както казахме по-горе, всички точки от една вълнова повърхност трептят с еднаква фаза, чиято стойност Φ_0 зависи от **x** и **t**:

$$(3) \quad \Phi_0 = \omega t - kx + \varphi = \text{const}.$$

След определено време такава стойност на фазата Φ_0 ще има друга вълнова повърхност с друга координата т.е. конкретната стойност на фазата се премества по оста **X**. Скоростта на преместване на фазата можем да определим от (3) като първата производна на координатата **x** по времето **t**:

$$x = \frac{1}{k}(\omega t + \varphi - \Phi_0)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v$$

Виждаме, че скоростта на промяна на фазата е същата, както и скоростта на разпространение на вълната **v**. Затова тази скорост се нарича още фазова скорост на вълната.

Уравнение на сферична вълна

Сферичната вълна се разпространява от дадена точка, в която се намира източникът на трептенията, във всички посоки. Затова вълновият ѝ фронт е сферичен (ако средата е еднородна), за разлика от плоската вълна. В общия случай сферичната вълна е тримерна – разпространява се в цялото тримерно пространство, но като пример в двумерния случай може да се разгледа водна вълна на повърхността на спокойна вода когато в нея пуснем камък. В този случай вълновият фронт е окръжност и могат да се наблюдават вълновите повърхности във всяка точка (концентрични окръжности с общ център в мястото на пускане на камъка).

Уравнението на сферичната вълна може да се получи на базата на същите разсъждения, които направихме за плоската вълна. Уравнението на вълната и в този случай трябва да е функция на времето и на разстоянието, на което се намира дадената точка от източника на трептения. Разликата е в това, че сега разстоянието трябва да се отчита във всички посоки, а не както при плоската вълна само по оста X. Затова уравнението ще зависи от разстоянието $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, т.е. $y = f(r, t)$.

Друга съществена разлика е, че за сферичната вълна амплитудата на трептенията се изменя обратнопропорционално на разстоянието r , на което се намира дадената точка от източника (във всички посоки!), поради което уравнението ѝ има вида:

$$\xi(r, t) = \frac{A}{r} \sin(\omega t - kr + \phi)$$

В общия случай уравнението на вълната може да се запише като:

$$\xi(\vec{r}, t) = A(\vec{r}) \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi),$$

където $\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$ е скаларното произведение на вълновия вектор $\vec{k}$ и радиус-вектора $\vec{r}$ на дадената точка, в която се търсят характеристиките ѝ. Вижда се, че уравненията на плоската и сферичната вълна са частни случаи на това общо уравнение.