

# Вълнов пакет. Групова скорост. Връзка между фазова и групова скорост

## Вълнов пакет. Групова скорост

Ако вълните, които се наслаждат, не са кохерентни, но честотите им се различават много малко (напр. две вълни с кръгови честоти  $\omega$  и  $\omega + \Delta\omega$ ,  $\Delta\omega \ll \omega \Rightarrow \Delta k \ll k$ ), картината, която се получава е подобна на явлението биене при трептенията – амплитудата на резултантното трептене в дадена точка не е постоянна, а се променя с времето  $t$  и координатата  $x$ . Такава група от две или повече вълни с близки честоти се нарича вълнов пакет. Ще получим уравнението на вълновия пакет в най-простия случай, когато имаме само две вълни с равни амплитуди:

$$y_1 = A \sin(\omega t - kx)$$

$$y_2 = A \sin((\omega + \Delta\omega)t - (k + \Delta k)x)$$

$$y = y_1 + y_2 = 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right) \sin\left(\frac{2\omega + \Delta\omega}{2}t - \frac{2k + \Delta k}{2}x\right) \approx 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right) \sin(\omega t - kx),$$

където

$$(1) A^* = \left| 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right) \right|$$

също както по-горе може да се разглежда като променлива амплитуда на резултантната вълна (вълновия пакет). Както виждаме от (1), самата амплитуда  $A^*$  представлява вълна с кръгова честота  $\Delta\omega/2$  и вълново число  $\Delta k/2$ . Следователно в средата се разпространява вълна (вълнов пакет), чийто максимум на амплитудата се премества с определена скорост  $u$  – това е фазовата скорост на вълната на амплитудата:

$$(2) u = \frac{\frac{\Delta\omega}{2}}{\frac{\Delta k}{2}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}.$$

Тъй като енергията, която пренася вълновият пакет, е пропорционална на квадрата на амплитудата, то скоростта на пренасяне на енергията на вълновия пакет е точно фазовата скорост  $u$  (2) на промяна на амплитудата  $A^*$ . Тази скорост  $u$  се нарича групова скорост на вълновия пакет. В общия случай, когато вълновият пакет се състои от голям брой вълни, с кръгови честоти в малък интервал  $d\omega$  около някаква стойност  $\omega$  на основната вълна от пакета (съответно вълнови вектори в интервал  $dk$  около  $k$ ), за груповата скорост  $u$  на пакета ще получим:

$$(3) u = \frac{d\omega}{dk}.$$

## Връзка между фазова и групова скорост

Можем да намерим връзката между груповата скорост  $u$  (3) на вълновия пакет и фазовата скорост  $v = \frac{\omega}{k}$  на основната вълна от пакета:

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(vk)}{dk} = v + k \frac{dv}{dk} = v + k \frac{dv}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dk}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow \frac{d\lambda}{dk} = -\frac{2\pi}{k^2}$$

$$u = v - \frac{2\pi}{k} \frac{dv}{d\lambda}$$

$$(4) u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda},$$

където  $\lambda$  е дължината на вълната на основната вълна от пакета в дадената среда.

От (4) виждаме, че груповата скорост  $u$  на вълната може да бъде различна от фазовата ѝ скорост  $v$ , ако производната  $\frac{dv}{d\lambda} \neq 0$ . Зависимостта на скоростта на разпространение (фазовата скорост  $v$ ) на вълната от честотата ѝ (или дължината на вълната) в дадена среда се нарича дисперсия. Ако в дадената среда няма дисперсия, скоростта на разпространение на вълната няма да зависи от дължината на вълна-

та ( $\frac{dv}{d\lambda} = 0$ ) и (4) груповата скорост ще е равна на фазовата ( $u=v$ ), т.е. всички вълни от пакета ще се разпространяват с еднаква скорост и той ще запазва формата си. В реална среда, където винаги имаме дисперсия, вълновият пакет ще се разширява и постепенно ще се размива, като колкото е по-голяма дисперсията, толкова по-бързо ще се извършва процесът на разширяване и размиване.