

Уравнение на плоска електромагнитна вълна, фазова скорост

Уравнение на плоска електромагнитна вълна

Нека да разгледаме плоска електромагнитна вълна, разпространяваща се в среда с постоянни електрични и магнитни свойства ($\epsilon_r, \mu_r = \text{const}$), която е неутрална ($\rho = 0$) и непроводяща ($j = 0$). В този случай уравненията на Максвел, описващи вълната, са:

$$(1) \text{rot } \vec{E} = -\mu_0 \mu_r \frac{\partial \vec{H}}{\partial t};$$

$$(2) \text{rot } \vec{H} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t};$$

$$(3) \text{div } \vec{E} = 0;$$

$$(4) \text{div } \vec{H} = 0.$$

Ако изберем отправната система така, че оста X да е перпендикулярна на вълновия фронт, вълната ще се разпространява само по оста X . Следователно интензитетите на електричното поле E и на магнитното поле H на електромагнитната вълна няма да зависят от координатите y и z . Тогава уравненията (1÷4) се опростяват значително. Ако разпишем уравненията по координати като имаме предвид, че производните на E и H по координатите y и z трябва да са равни на нула, се получава:

$$0 = \mu_0 \mu_r \frac{\partial H_x}{\partial t}$$

$$0 = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

$$(5) \frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu_0 \mu_r \frac{\partial H_y}{\partial t};$$

$$(6) \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial E_y}{\partial t};$$

$$(7) \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0;$$

$$(8) \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0.$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu_0 \mu_r \frac{\partial H_z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

От първото уравнение в (5) и (8) следва, че компонентата H_x не зависи нито от x нито от t . От първото уравнение в (6) и (7) следва същото за E_x . Тъй като електричното и магнитното поле на електромагнитната вълна се променят периодично, от полученото следва, че полето няма компоненти по оста X . Следователно трептенията на векторите E и H са само по осите Y и Z , т.е. перпендикулярно на посоката на разпространение на вълната. Това показва, че електромагнитната вълна е напречна вълна.

От второто уравнение в (5) и третото уравнение в (6) следва, че промяната на E_z води до промяна на H_y и обратно, т.е. тези промени не предизвикват възникване или промени на E_y и H_z . Същият извод може да се направи от второто уравнение в (6) и третото уравнение в (5) за промяната на E_y и H_z по отношение на E_z и H_y . Следователно: 1) ако електричното поле на вълната е насочено по оста Y , магнитното винаги е насочено по Z (и обратно), т.е. и електричното и магнитното полета се изменят само по едно направление; 2) това са две независими системи от уравнения и всяка от тях може да се използва за описание на полето.

Нека да изберем за описание на електромагнитното поле втората система (за E_y и H_z):

$$(9) \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu_0 \mu_r \frac{\partial H_z}{\partial t}; \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial E_y}{\partial t}.$$

Като имаме предвид, че в този случай $E_z = H_y = 0$ и полученото по-горе ($E_x = H_x = 0$), то $E_y = E$ и $H_z = H$. Така (9) придобива вида:

$$(10) \frac{\partial E}{\partial x} = -\mu_0 \mu_r \frac{\partial H}{\partial t}; \quad \frac{\partial H}{\partial x} = -\epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial E}{\partial t}.$$

Втората производна на E по координатата X е:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial E}{\partial x} = -\mu_0 \mu_r \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial t} = -\mu_0 \mu_r \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial H}{\partial x} = \epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial E}{\partial t} = \epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}.$$

Това е вълново уравнение на плоска вълна, която се разпространява по оста X с фазова скорост

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}}. \text{ Решението му е:}$$

$$(11) E = E_m \cos(\omega t - kx + \varphi_1).$$

Аналогично за H се получава:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r \frac{\partial^2 H}{\partial t^2},$$

т.е. вълна със същата фазова скорост и уравнение:

$$(12) H = H_m \cos(\omega t - kx + \varphi_2).$$

Като заместим (11) и (12) в двете уравнение (10) получаваме:

$$(13) \begin{aligned} kE_m \sin(\omega t - kx + \varphi_1) &= \mu_0 \mu_r \omega H_m \sin(\omega t - kx + \varphi_2) \\ kH_m \sin(\omega t - kx + \varphi_2) &= \varepsilon_0 \varepsilon_r \omega E_m \sin(\omega t - kx + \varphi_1) \end{aligned}$$

За да бъдат удовлетворени и двете уравнения (13) трябва да бъдат изпълнени две условия: 1) началните фази трябва да са равни ($\varphi_1 = \varphi_2$); 2) коефициентите пред $\sin$ в двете страни на всяко уравнение трябва да са равни, т.е.:

$$(14) \begin{aligned} kE_m &= \mu_0 \mu_r \omega H_m \\ kH_m &= \varepsilon_0 \varepsilon_r \omega E_m \end{aligned}$$

Ако разделим двете уравнения в (14) и прехвърлим електричните и магнитни величини съответно отляво и отдясно се получава:

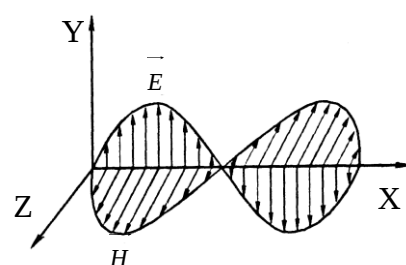
$$\varepsilon_0 \varepsilon_r E_m^2 = \mu_0 \mu_r H_m^2.$$

Следователно трептенията на електричното и магнитното поле се извършват във фаза ($\varphi_1 = \varphi_2$), а отношението на амплитудите на двата вектора във вакуум е:

$$\frac{E_m}{H_m} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \approx 377.$$

Уравненията на плоска електромагнитната вълна са:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_m \cos(\omega t - kx) \\ \vec{H} &= \vec{H}_m \cos(\omega t - kx) \end{aligned}$$



фиг. 1

като сме избрали началния момент така, че началната фаза на трептенията да е равна на нула. При разпространение на плоската електромагнитна вълна по оста X, векторите на интензитетите на електричното поле $\vec{E}$ и на магнитното поле $\vec{H}$ трептят във фаза съответно по осите Y и Z (фиг. 1).

Фазова скорост на електромагнитна вълна

От получените диференциални вълнови уравнения за интензитетите на електричното и магнитното поле следва, че фазовата скорост на електромагнитната вълна е:

$$(15) v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_r \mu_r}},$$

а за скоростта ѝ във вакуум ($\varepsilon_r = \mu_r = 1$) се получава:

$$(16) v_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c.$$

Стойността, получена от (16) – $3 \cdot 10^8$ m/s, е много близка до определената стойност на скоростта на светлината във вакуум c . Това дава основание на Максвел да направи предположението, че светлината също е електромагнитна вълна и $v_0 \equiv c$. Оказва се също така, че стойността на $\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$ за прозрачните вещества съвпада с коефициента им на пречупване n . Така фазовата скорост на светлината v в дадено прозрачно вещество с коефициент на пречупване n , съгласно (15) и (16) ще бъде:

$$v = \frac{c}{n}.$$