

Затихващи трептения – основни характеристики, уравнение на движение, диференциално уравнение

В реалните трептящи системи винаги действат някакви сили на триене и съпротивление на средата. Това води до постепенно намаляване на механичната енергия на трептящата материална точка, а следователно и до намаляване на амплитудата на трептенията с течение на времето. В зависимост от силите на съпротивление, след определено време трептението се прекратява. **Трептения, чиято амплитуда намалява с течение на времето се наричат затихващи трептения.** Тези трептения не са истински периодични движения, защото трептящото тяло не преминава през равни интервали от време през еднакви състояния (максималното отклонение всеки път е по-малко от предходния), но уравнението им на движение е сходно с това на хармоничните трептения и можем условно да ги наричаме периодични, ако коефициентът на триене (или съпротивление) на средата е постоянен. Видяхме, че уравнението на движение е решение на диференциалното уравнение на трептението, т.е. първо ще трябва да получим диференциалното уравнение на затихващото трептение. Ще го получим както за хармоничните трептения – от втория принцип на Нютон, като пак разглеждаме пружинно махало. В този случай освен възвръщащата сила $F = -kx$, на тялото действа и сила на съпротивление, която е насочена обратно на посоката на движение и при малки скорости зависи линейно от скоростта – $F_s = -rv$ (r е коефициентът на триене (съпротивление) на средата и предполагаем, че е постоянен). Като използваме принципа на суперпозицията, за ускорението ще получим:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n F_i}{m} = -\frac{k}{m}x - \frac{r}{m}v$$

и като отчетем, че скоростта е първа производна, а ускорението – втора производна на координатата x по времето, ще получим диференциалното уравнение на затихващото трептение:

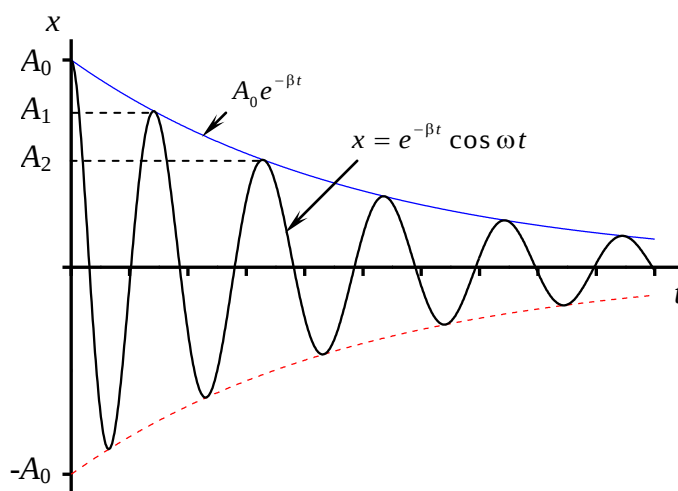
$$(1) \frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0,$$

като в (1) сме положили отношението $\frac{r}{m} = 2\beta$, β

се нарича коефициент на затихване, а $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ е

т.нар. собствена кръгова честота на трептението (кръговата честота на хармоничното трептение, ако няма сила на триене) – това е същата кръгова честота, която получихме във 2 въпрос. Виждаме, че (1) също е линейно хомогенно уравнение от втори ред. Решенията му са:

$$(2) \begin{aligned} x &= A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) \\ x &= A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$



фиг. 1

и също зависят от две произволни константи – A_0 и φ , които се определят от началните условия. Виждаме, че видът на (2) е същият, както на уравнението на движение на хармоничното трептение, ако приемем величината $A = A_0 e^{-\beta t}$ за променлива амплитуда на трептението. Тъй като $e^{-\beta t}$ е намаляваща функция, амплитудата при всяко преминаване през положението на максимално отклонение с течение на времето ще бъде все по-малка от началната си стойност A_0 . **Зависимостта (2) е уравнението на движение на затихващо трептение.** Графиката на уравнението на движение на затихващо трептение (2) е представена на фиг. 1.

Основните характеристики на едно принудено трептение вече са четири – освен началната амплитуда A_0 , началната фаза φ и кръговата честота ω , трябва да знаем и коефициентът на затихване β . Началната амплитуда A_0 и началната фаза φ , също както и при хармоничните трептения, зависят от началните условия, а коефициентът на затихване β – от коефициентът на триене r и масата на тялото m . Кръговата честота на затихващите трептения ω , за разлика от хармоничните трептения, вече не е характеристика само на трептящата система, а зависи и от средата чрез коефициентът на затихване β . Стойността ѝ може да се получи като заместим x от (2) (и производните му) в (1) и решим полученото уравнение:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2},$$

откъдето се вижда, че ω е по-малка от собствената честота ω_0 .

Ще дефинираме и период T на затихващите трептения като времето между две преминавания през равновесното положение:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Виждаме, че T е по-голям от периода на незатихващите трептения $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$, но ако $\beta \ll \omega_0$, почти не се отличава от него.

Отношението на две съседни амплитуди (амплитудите при две последователни преминавания през максималното отклонение (фиг. 1)) е постоянна величина, която зависи само от коефициента на затихване β и периодът T :

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_0}{A_0 e^{-\beta T}} = e^{\beta T}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_0 e^{-\beta T}}{A_0 e^{-2\beta T}} = e^{\beta T}$$

и се нарича декремент на затихване. Натуралният логаритъм от декремента на затихване се нарича логаритмичен декремент на затихване:

$$\delta = \ln e^{\beta T} = \beta T$$

и също е една от основните характеристики на реалните (затихващи) трептящи системи.