Събиране на хармонични трептения в две взаимно перпендикулярни направления. Частни случаи. Фигури на Лисажу

Събиране на хармонични трептения в две взаимно перпендикулярни направления

Ако трептенията, в които участва материалната точка, са във взаимно перпендикулярни направления, движението ѝ в общия случай не е хармонично трептение. Материалната точка се движи по някаква криволинейна траектория, в зависимост от честотите, амплитудите и началните фази на двете трептения. Получените траектории при различни съотношения на честотите на двете трептения се наричат фигури на Лисажу. В този случай е по-лесно вместо да използваме векторни диаграми да определим уравнението на траекторията на движение. Ние ще разгледаме пак най-простият случай – когато честотите на двете трептения са равни. Нека уравненията на движение на двете трептения са:

$$\begin{aligned} x &= A\cos\omega t \\ y &= B\cos(\omega t+\varphi) \end{aligned} \quad (4)$$

Това е параметричното уравнение на кривата в равнината **XY**. За да получим зависимостта ***y*(*x*)** в явен вид трябва да изключим времето ***t*** от двете уравнения (4):

$$\left.\begin{aligned} &\cos\omega t = \frac{x}{A} \\ &\sin\omega t = \sqrt{1-\cos^2\omega t} = \sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}} \\ &\cos(\omega t+\varphi) = \cos\omega t\cos\varphi - \sin\omega t\sin\varphi = \frac{y}{B} \end{aligned}\right\} \frac{x}{A}\cos\varphi - \sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}}\sin\varphi = \frac{y}{B}.$$

$$\frac{y}{B}-\frac{x}{A}\cos\varphi = -\sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}}\sin\varphi$$

$$\left(\frac{y}{B}\right)^2 - 2\frac{y}{B}\frac{x}{A}\cos\varphi + \left(\frac{x}{A}\right)^2\cos^2\varphi = \sin^2\varphi - \left(\frac{x}{A}\right)^2\sin^2\varphi \ .$$

$$\left(\frac{y}{B}\right)^2 - 2\frac{y}{B}\frac{x}{A}\cos\varphi + \left(\frac{x}{A}\right)^2 = \sin^2\varphi \quad (5)$$

Това е уравнение на елипса, чиято голяма полуос сключва някакъв ъгъл с оста **X**. Следователно траекторията на движение на материалната точка е елипса, параметрите на която зависят от разликата **φ** в началните фази на двете трептения и техните амплитуди.

Частни случаи. Фигури на Лисажу

Ще разгледаме няколко частни случая.

1. Разликата в началните фази на двете трептения **φ=0**. В този случай (5) ще бъде:

$$\left(\frac{y}{B}\right)^2 - 2\frac{y}{B}\frac{x}{A} + \left(\frac{x}{A}\right)^2 = 0$$

$$\frac{y}{B}-\frac{x}{A} = 0 \ .$$

$$y = \frac{B}{A}x$$

Това е уравнение на права в I и III квадрант, която минава през началото на координатната система и сключва ъгъл $\arctan\frac{B}{A}$ с оста ***X***. Това е хармонично трептение по тази права с амплитуда $\sqrt{A^2+B^2}$ с уравнение:

$$r = \sqrt{A^2+B^2}\cos\omega t \ .$$

2. Разликата в началните фази на двете трептения **φ=π**. Този случай се отличава от предишния само по положението на правата – тя ще бъде във II и IV квадрант:

$$\left(\frac{y}{B}\right)^2 + 2\frac{y}{B}\frac{x}{A} + \left(\frac{x}{A}\right)^2 = 0$$

$$\frac{y}{B} + \frac{x}{A} = 0 \qquad .$$

$$y = -\frac{B}{A}x$$

Уравнението на движение ще има същия вид, но началното положение ще бъде друго.

3. Разликата в началните фази на двете трептения **φ=±π/2**. От (5) следва, че движението ще бъде по елипса, чиито главни оси съвпадат с координатните оси:

$$\left(\frac{y}{B}\right)^2 + \left(\frac{x}{A}\right)^2 = 1 .$$

Двата случая се различават само по посоката на движение на точката по елипсата – при **φ=+π/2** движението е по часовниковата стрелка, а при **φ=–π/2** е в обратна посока. Ако амплитудите на двете трептения са равни, ***A*=*B*=*R***, резултантното движение ще бъде по окръжност с радиус ***R***.

При плавна промяна на фазовата разлика от **0** до **2π**, траекторията се променя и преминава от права в I и III квадрант през наклонена елипса, елипса по координатните оси, права в II и IV квадрант пак наклонена елипса и т.н. до права в I и III квадрант при **φ=2π.**

Случаят, който разгледахме (при равни кръгови честоти на двете трептения), е най-простият случай на фигурите (т.нар. фигури на Лисажу), които се получават при наслагване на взаимно перпендикулярни трептения. В общия случай фигурите на Лисажу са криви, които са решение на системата параметрични уравнения:

$$x = A\cos\omega_1 t$$

$$y = B\cos\left(\omega_2 t + \varphi\right)$$

при различни съотношения на кръговите честоти ω_1/ω_2.

Когато съотношението на честотите е рационално число, напр. 1:2, 3:2, 3:4 и т.н. се получават по-сложни затворени криви, които също могат да се наблюдават на осцилоскоп.