

Векторно представяне на хармонично трептение. Събиране на хармонични трептения с еднакво направление. Биене

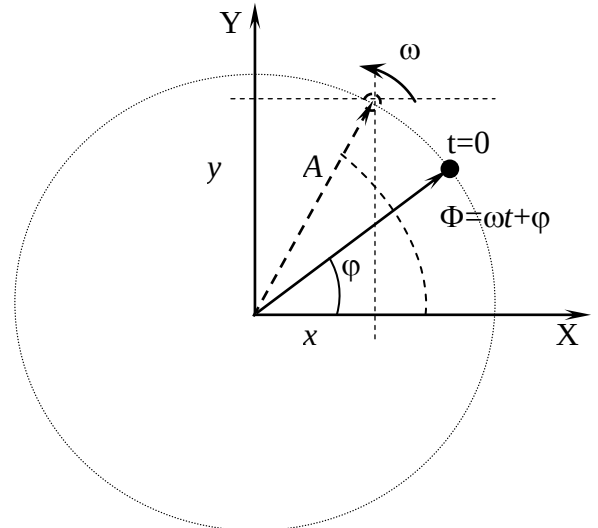
Векторно представяне на хармонично трептение

В много случаи е по-удобно да използваме т.нар. векторно представяне на едно хармонично трептение. Нека да разгледаме равномерно движение, с ъглова скорост ω , на материална точка по окръжност с радиус A (фиг. 1). Началната координата на точката (ъгълът спрямо оста X в момента $t=0$) е φ . За някакъв интервал от време t , материалната точка ще се завърти на ъгъл $\Delta\varphi=\omega t$ и ъгловата ѝ координата ще стане $\Phi=\Delta\varphi+\varphi=\omega t+\varphi$. Ако построим радиус-вектора от началото на координатната система до точката виждаме, че той се върти около началото на координатната система със същата ъглова скорост ω като материалната точка, а големината му е равна на радиуса на окръжността A . Проекциите на този радиус-вектор върху координатните оси X и Y във всеки момент от време t са:

$$x = A \cos \Phi = A \cos(\omega t + \varphi) \text{ и}$$

$$y = A \sin \Phi = A \sin(\omega t + \varphi),$$

т.е. те имат същия вид, както уравнението на движение на хармонично трептение. Следователно можем да представим хармоничното трептение чрез проекцията на радиус-вектор (с големина, равна на амплитудата A на трептението), с начало в равновесното положение на трептящата точка, въртящ се с ъглова скорост ω , равна на кръговата честота на трептението и начална ъглова координата φ , равна на началната фаза на трептението. Това векторно представяне е много удобно, особено при събиране на трептения с еднакво направление.



фиг. 1

Събиране на хармонични трептения с еднакво направление

Дотук разгледахме най-простия вид трептение – хармонично трептение предизвикано от една възвръщаща сила. В много случаи на трептящото тяло могат да действат няколко сили. Като имаме предвид принципа на суперпозицията, можем да разглеждаме действието на тези сили независимо една от друга и да получим равнодействащата като векторна сума на всички действащи сили. По същия начин можем да постъпим и с резултата от действието на силите – в случая това са независими трептения, в които участва тялото под действие на тези сили. Като имаме предвид векторното представяне на хармоничното трептение, можем да приложим принципа на суперпозицията и за тях т.е. резултантното трептение ще получим като векторна сума от векторите на отделните трептения.

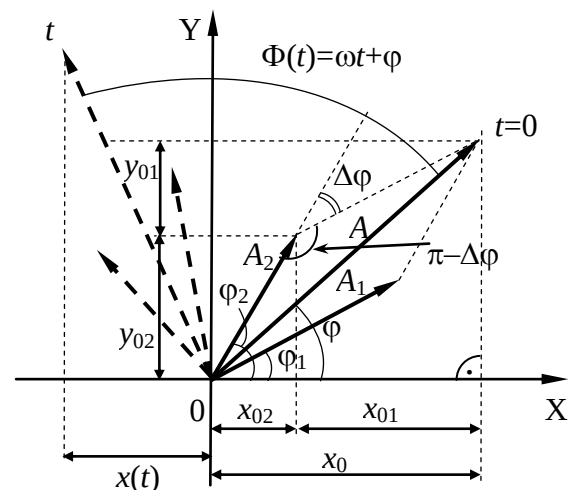
Ще разгледаме първо най-простият случай – тяло (материална точка) участва в две трептения с еднаква кръгова честота ω в едно направление – по избраната ос X :

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \text{ и}$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2).$$

Ще използваме векторното представяне на трептенията – в този случай (фиг. 2) двата радиус-вектора, чиито проекции по оста X изобразяват трептенията, имат различни дължини (равни на амплитудите на двете трептения A_1 и A_2) и различно положение спрямо оста X в началния момент (началните фази на трептенията φ_1 и φ_2). Тъй като двата вектора се въртят с еднаква ъглова скорост ω , ъгълът между тях, който е равен на фазовата разлика $\Delta\Phi=\Phi_2-\Phi_1$ между трептенията остава постоянен:

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = (\omega t + \varphi_2) - (\omega t + \varphi_1) = \varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi = \text{const},$$



фиг. 2

т.е. фазовата разлика между трептенията във всеки момент от време е равна на фазовата разлика между тях в началния момент.

Радиус-векторът на резултантното трептение (сумата от двете трептения) ще получим като векторна сума на радиус-векторите на двете трептения, а неговата проекция върху оста **X** ще ни даде уравнението на движение на трептението:

$$(1) \quad x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega t + \varphi).$$

Тъй като ъгловата скорост на въртене на двата вектора е еднаква, ъгловата скорост на тяхната сума (кръговата честота на резултантното трептение) също ще бъде ω . Следователно, за да намерим уравнението на резултантното трептение, трябва да определим само амплитудата **A** и началната фаза φ . От фиг. 2 се вижда, че амплитудата **A** (от правилото за събиране на вектори) е:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos(\pi - \Delta\varphi)} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi},$$

а за началната фаза φ ще получим:

$$\tan \varphi = \frac{y_{01} + y_{02}}{x_{01} + x_{02}} = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.$$

$$\varphi = \arctan \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$$

Така уравнението на движение (1) придобива вида:

$$x = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi} \cos \left(\omega t + \arctan \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \right).$$

Следователно, когато събираме хармонични трептения с еднакви честоти в едно направление, резултантното трептение също е хармонично трептение, със същата честота, а амплитудата и началната му фаза зависят от амплитудите и началните фази на всички трептения. Векторното представяне на хармоничните трептения ни позволява да събираме и повече трептения в едно направление – прибавяме ги последователно, както процедираме с векторите. Резултантното трептение винаги е в същото направление, както съставлящите го.

Биене

Ако двете трептения не са с еднакви честоти, но двете честоти са много близки, $\omega_1 \approx \omega_2 = \omega$, се наблюдава едно интересно явление с голямо приложение – биене. Ще разгледаме най-простият случай на биене, когато двете трептения имат еднакви амплитуди **A**, началните им фази са равни на **0** и се извършват в еднакво направление. Уравненията на движение на двете трептения в този случай са:

$$x_1 = A \cos \omega_1 t$$

$$x_2 = A \cos \omega_2 t$$

и за резултантното трептение ще получим:

$$x = x_1 + x_2 = A \cos \omega_1 t + A \cos \omega_2 t = 2A \cos \frac{(\omega_2 - \omega_1)}{2} t \cos \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2} t = \left(2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right) \cos \omega t.$$

Тъй като $\frac{\Delta\omega}{2} \ll \omega$, изразът в скобите се променя много по-бавно от $\cos \omega t$ и можем да го считаме за

променлива амплитуда на хармонично трептение с кръгова честота ω . От друга страна този израз може да бъде отрицателен при определени стойности на **t**, т.е. не може да бъде амплитуда на трептение, тъй като амплитудата е винаги положителна величина. Тогава можем да разглеждаме абсолютната стойност на израза като променлива амплитуда **A**:

$$(2) \quad A = \left| 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right|$$

и уравнението на движение ще придобие вида:

$$(3) \quad x = A \cos \omega t.$$

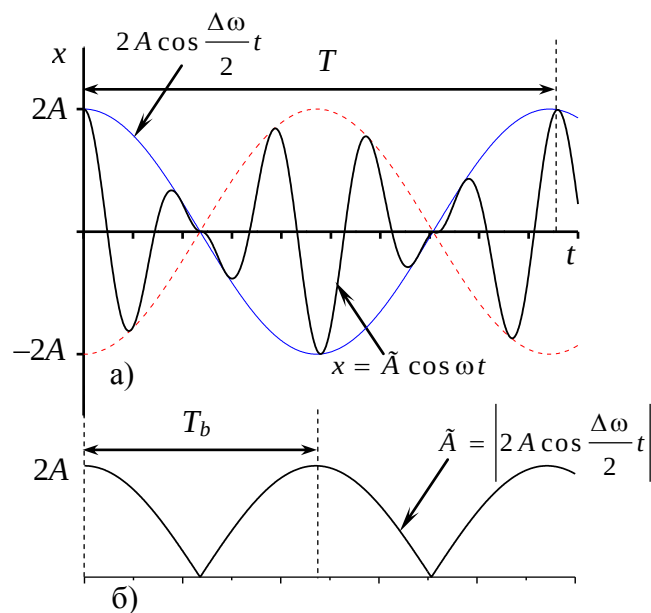
Графиките на уравнението на движение (3) и амплитудата $\tilde{A}$ (2) са показани на фиг. 3. Вижда се (фиг. 3б), че периодът на (2) е два пъти по-малък (съответно честотата е два пъти по-голяма) отколкото периодът **T** на хармоничното трептение $2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t$ (фиг. 3а), т.е. периодът на биене **T_b** (периодът на променливата амплитуда) ще бъде:

$$T_b = \frac{1}{2}T = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\frac{\Delta\omega}{2}} = \frac{2\pi}{\Delta\omega},$$

а честотата на биене:

$$f_b = \frac{1}{T_b} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi} = f_2 - f_1.$$

Явлението биене намира широко приложение в практиката когато е необходима фина настройка на дадена честота, напр. при настройване на музикални инструменти.



фиг. 3