

Принудени трептения – основни характеристики, уравнение на движение, диференциално уравнение. Резонанс.

Принудени трептения

Едно затихващо трептение може да се превърне в незатихващо, ако предаваме на системата енергия отвън, която да компенсира загубите вследствие триенето и съпротивлението на средата. Такова трептение се нарича принудено трептение. Тази енергия се предава чрез извършване на работа от някаква външна сила. Тъй като работата може да бъде положителна или отрицателна в зависимост от посоката на силата и преместването, ако се опитаме да предадем енергия в неподходящ момент (силата действа в посока, обратна на преместването на трептящото тяло в дадения момент), може да постигнем обратен ефект – вместо да предадем, да отнемем енергия от системата. Следователно не можем да предизвикаме принудени трептения с постоянна сила – тя действа винаги в една посока и през част от времето ще отнема енергия от системата. **Принудено трептение се осъществява, когато на една трептяща система действа периодична сила** напр. $F \cos \omega t$. Под действие на тази периодична сила системата ще започне да трепти със същата честота, с която се променя силата (след първоначален период на "синхронизация"), тъй като така ще приема енергията в подходящия момент. Диференциалното уравнение ще получим от втория принцип на Нютон, като отчетем и действието на външната периодична сила:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n F_i}{m} = -\frac{k}{m}x - \frac{r}{m}v + \frac{F}{m} \cos \omega t,$$
$$(1) \frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f \cos \omega t.$$

Означили сме отношението $\frac{F}{m} = f$ за опростяване на записа на уравнението. Това е нехомогенно диференциално уравнение и решението му се получава като сума от общото решение x_0 на хомогенното уравнение, което описва затихващото трептение и едно частно решение x_1 на (1). Ние знаем общото решение на хомогенното уравнение от предходния въпрос – това са напр. функции от вида:

$$(2) x_0 = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \varphi'),$$

като с $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ и φ' сме означили кръговата честота и началната фаза на затихващото трептение, тъй като те може да се различават от кръговата честота ω и началната фаза φ на принуденото трептение.

Остава да намерим едно частно решение на (1) т.е. решение, което не съдържа произволни константи. Ще го търсим във вида:

$$(3) x_1 = A \cos(\omega t - \varphi).$$

Трябва да намерим такива стойности на A и φ , при които се удовлетворява (1). Ще постъпим както при определянето на кръговата честота на затихващите трептения – ще заместим x и производните му в (1) и ще се опитаме да решим полученото уравнение:

$$\frac{dx_1}{dt} = -\omega A \sin(\omega t - \varphi) = \omega A \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t - \varphi) = \omega^2 A \cos(\omega t - \varphi + \pi)$$

$$(4) \omega^2 A \cos(\omega t - \varphi + \pi) + 2\beta \omega A \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + \omega_0^2 A \cos(\omega t - \varphi) = f \cos \omega t.$$

Полученото уравнение (4) има вид на сума от хармонични трептения в едно направление. Затова е най-лесно да бъдат определени A и φ от него чрез векторна диаграма (фиг. 1). Третият член на сумата има амплитуда $\omega_0^2 A$ и начална фаза $(-\varphi)$, следователно векторът сключва ъгъл φ с оста X по посока на часовниковата стрелка. Вторият член на сумата е отместен от третия на ъгъл $(+\pi/2)$ и има амплитуда $2\beta\omega A$, а първият е отместен спрямо третия на ъгъл $(+\pi)$ и има амплитуда $\omega^2 A$. Сумата от трите вектора трябва да дава векторът от дясната страна на (4) с амплитуда f и начална фаза 0 . Като сумираме векторите на векторната диаграма (фиг. 1) следва:

$$f^2 = \frac{F^2}{m^2} = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 A^2 + 4\beta^2 \omega^2 A^2$$

$$(5) A = \frac{F}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}},$$

а за ъгъла φ получаваме:

$$\tan \varphi = \frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

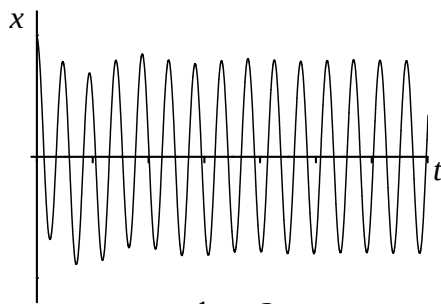
$$(6) \varphi = \arctan \frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Така, като заместим (5) и (6) в (3), частното решение придобива вида:

$$(7) x_1 = \frac{F}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \cos\left(\omega t - \arctan \frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right),$$

а общото решение на (1), т.е. уравнението на движение на принуденото трептене, ще получим от сумата на (2) и (7):

$$(8) x = x_0 + x_1 = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \varphi') + \frac{F}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \cos\left(\omega t - \arctan \frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right).$$



фиг. 2

Трябва да отбележим, че първият член на (8) намалява много бързо (времето за "синхронизация"), след което само вторият член оказва влияние, т.е. на практика принуденото трептене от даден момент нататък е хармонично трептене с кръгова честота равна на кръговата честота ω на външната сила и амплитуда (5) (фиг. 2).

Резонанс

Виждаме (5), че амплитудата на принуденото трептене зависи освен от големината на външната сила (нейната амплитуда F) и от честотата ω на външната сила. Това означава, че при една и съща амплитуда F на външната сила, при определена честота е възможно

увеличаване на амплитудата (5) на принуденото трептене. Тази честота, при която системата най-лесно откликва на външно въздействие, се нарича резонансна честота ω_r , а **явлението, при което амплитудата на принуденото трептене се увеличава многократно (в идеалния случай, при отсъствие на съпротивление на средата – до безкрайност), се нарича резонанс**. Резонансната честота ω_r можем да намерим като определим максимума на амплитудата (5), чиято графика за различни стойности на β е показана на фиг. 3, в зависимост от честотата ω , т.е. минимума на величината под корена в знаменателя. Трябва да определим първата производна на тази величина по ω и да я приравним на 0:

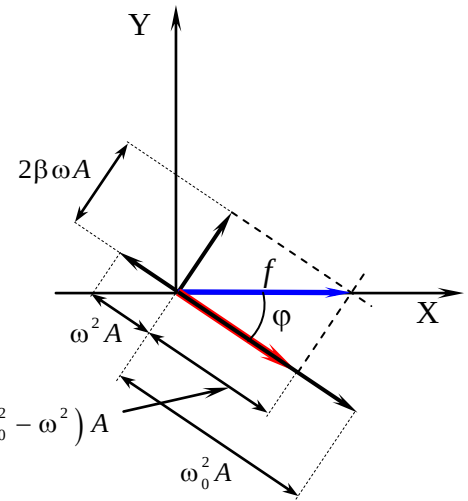
$$-4(\omega_0^2 - \omega^2 - 2\beta^2)\omega = 0.$$

Това уравнение има три корена: $\omega = 0; \pm \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$.

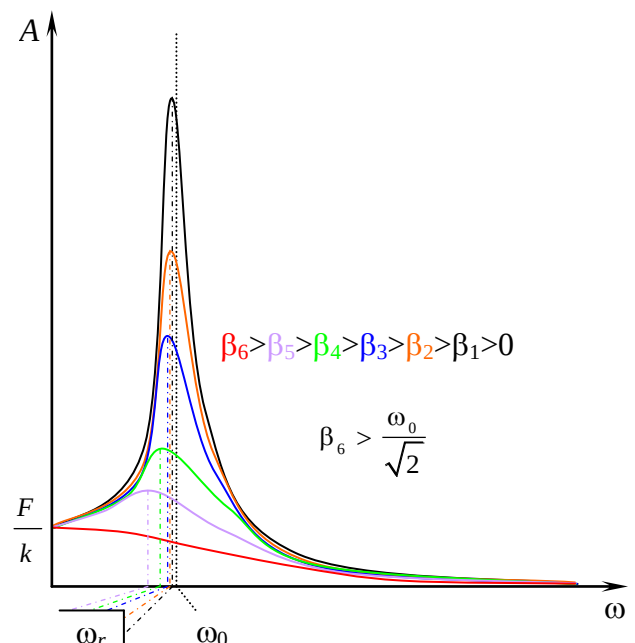
Първият отговаря на максимум (може да се провери чрез втората производна) на подкоренната величина и следователно минимум на амплитудата, а отрицателният корен няма физически смисъл. Така за резонансната честота на принуденото трептене получаваме:

$$(9) \omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2},$$

а за стойността на амплитудата A_r при резонанс, като



фиг. 1



фиг. 3

заместим (9) в (5):

$$(10) A_r = \frac{F}{2\beta m \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

От (9) следва, че резонансната честота ω_r е винаги по-малка от собствената честота ω_0 на трептението и намалява с увеличаване на коефициента на затихване β (фиг. 3). Ако коефициентът на затихване е много голям ($\beta > \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$, β_6 на фиг. 3), изразът (9) става имагинерен, т.е. резонанс няма да се наблюдава при никаква реална честота (няма максимум на резонансната крива). Същото е валидно и за (10) – амплитудата при резонанс е толкова по-голяма, колкото е по-малко β (фиг. 4) и при $\beta > \omega_0$ става имагинерна, т.е. изобщо няма трептение. От (9) и (10) се вижда също, че в идеалния случай ($\beta=0$) резонансната честота ω_r е равна на собствената честота на системата, а резонансната амплитуда A_r клони към безкрайност.

Представените на фиг. 3 резонансни криви на амплитудата A на принуденото трептение (5) от честотата ω на външната сила потвърждават изводите, които направихме при анализа на (9) и (10). Виждаме, че колкото е по-малко β , толкова по-висок и по-остър е максимумът (резонансната амплитуда), а положението му ω_r по оста ω (резонансната честота) се измества по-надясно и се доближава до собствената честота на трептението ω_0 . От фиг. 3 можем да направим още няколко извода.

Когато честотата $\omega \rightarrow 0$, всички резонансни криви клонят към една и съща стойност – $\frac{F}{m\omega_0^2} = \frac{F}{k}$ (5) –

това е отклонението, което получава системата при постоянна сила (когато $\omega=0$ силата $F\cos\omega t$ не зависи от времето t и не може да предизвика принудено трептение). Когато честотата $\omega \rightarrow \infty$, всички резонансни криви асимптотично клонят към нула (5) – силата се променя толкова бързо, че системата няма време да реагира на въздействието.

Явлението резонанс (при механични, електромагнитни и др. трептения) намира много широко приложение в техниката и практиката напр. при настройване на радиоприемник или телевизор на определена честота.