

Хармонични трептения. Уравнение на движение. Основни величини – амплитуда, фаза, честота, период, кръгова честота. Кинематика на хармонични трептения – отместване, скорост, ускорение

Хармонични трептения. Уравнение на движение

В природата много често се наблюдават процеси, при които дадена система се връща в първоначалното си състояние след определен период от време. Примери за такива процеси са движението на махало, движението на топка, пусната от някаква височина към Земята, движението на електроните в атома. Всеки такъв процес, който се характеризира с определена повторемост във времето, се нарича периодичен процес или трептение (колебание). При всички трептения някаква величина се изменя периодично с времето – това може да бъде разстояние от дадена точка, ъгъл на отклонение, сила, електричен заряд, напрежение, големина на електричен ток и др. В зависимост от променящата се величина разглеждаме различни видове трептения – механични, електромагнитни, електромеханични и др. Първо ще разгледаме по-подробно механичните трептения, а по-късно ще обобщим получените резултати и за електромагнитните, тъй като това са двата вида най-широко разпространени в природата и техниката трептения.

Трептенията се разделят най-общо на два вида – свободни и принудени трептения. Най-напред ще разгледаме най-простия (идеализиран) случай на свободни трептения – свободно незатихващо трептение. В този случай ние пренебрегваме силите на триене и съпротивление на средата, които могат да доведат до намаляване на енергията на трептящата система. Свободните незатихващи трептения се наричат хармонични трептения и при тях всяко състояние на трептящата система се повтаря през еднакви интервали от време. Уравнението на движение на такова трептение се изразява чрез най-простите периодични функции – $\sin$ и $\cos$. Такова трептение обикновено има само една степен на свобода, затова ще разглеждаме само едномерно движение (промяна) по избрана ос X . В такъв случай уравнението на движение на едно хармонично трептение ще бъде:

$$(1) \ x(t) = A \sin \Phi(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \text{ или}$$

$$(2) \ x(t) = A \cos \Phi(t) = A \cos(\omega t + \varphi),$$

където x е величината, която се променя периодично (това може да бъде отклонение на топче, големина на ток и др.), а A , ω и φ са константи.

Основни величини – амплитуда, фаза, честота, период, кръгова честота

Нека да разгледаме по-подробно величините, които участват в уравнението на движение (1) или (2). Константата A се нарича амплитуда на трептението. Това е максималното отклонение на величината x от равновесното ѝ положение и се измерва в същите единици, в които се измерва x . Аргументът на $\sin$ или $\cos$ – $\Phi = \omega t + \varphi$ – се нарича фаза на трептението. Тя се променя във всеки момент от време и определя големината и знака на величината x . Стойността φ на фазата в началния момент на трептението $t=0$ се нарича начална фаза. Фазата и началната фаза се измерват в [rad]. Величината ω (коэффициентът пред времето t в уравнението на движение) се нарича кръгова (циклична) честота и за хармоничните трептения е характеристика само на трептящата система. Мерната ѝ единица е [rad/s]. Тъй като при хармоничните трептения всяко състояние на системата се повтаря през равни интервали от време, можем да въведем и още две величини – период T и честота f . Период е интервалът от време, за което се извършва едно пълно трептение (най-малкото време между две преминавания на системата през едно и също състояние), а честотата е броят пълни трептения, които се извършват за единица време. От определенията на двете величини се вижда, че те са реципрочни $f=1/T$. Като използваме определенията за период ($x(t)=x(t+T)$) и вземем предвид, че $\sin$ и $\cos$ са периодични функции с период 2π ($\sin \alpha = \sin(\alpha + 2\pi)$), можем да намерим връзката между кръговата честота ω , периодът T и честотата f на трептението:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) = x(t+T) = A \sin(\omega(t+T) + \varphi)$$

$$\sin(\omega t + \varphi) = \sin(\omega t + \varphi + 2\pi) = \sin(\omega(t+T) + \varphi)$$

$$\omega t + \varphi + 2\pi = \omega(t+T) + \varphi$$

$$\omega T = 2\pi$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f.$$

Виждаме, че връзката е същата както между ъгловата скорост, периода и честотата при равномерно движение по окръжност. Този факт ще обясним по-нататък, когато говорим за векторното представяне на хармонично трептение.

Кинематика на хармонични трептения – отместване, скорост, ускорение

Ще разгледаме основните кинематични величини на едно хармонично трептение, на базата на механично трептение, напр. движение на материална точка, окачена на пружина (т.нар. пружинно махало). В този случай величината, която се променя периодично, е отклонението на материалната точка от равновесното и положение, т.е. тя извършва механично движение по една ос (с една степен на свобода), която можем да изберем за X . Законът ѝ за движение може да бъде напр. (1). Величината x наричаме отместване на материалната точка – това е координатата ѝ по оста X във всеки момент от време. Скоростта на точката можем да намерим като първа производна на координатата (отместването) по времето:

$$(3) \quad v = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \varphi) = \omega A \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Виждаме, че скоростта също се изменя по периодичен закон, тя се променя със същата честота, но с различна начална фаза, $(\varphi + \pi/2)$ вместо φ и с амплитуда ωA .

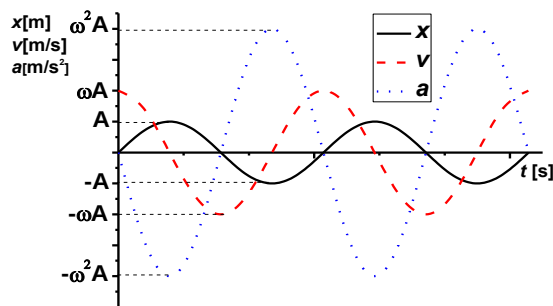
Тъй като скоростта също се изменя с времето, движението се извършва с ускорение a , което можем да намерим като първа производна на скоростта v (втора производна на координатата x) по времето от (3):

$$(4) \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi) = \omega^2 A \sin(\omega t + \varphi + \pi),$$

т.е. и ускорението се променя периодично със същата честота, като началната фаза се различава с $\pi/2$ от началната фаза на скоростта и с π – от началната фаза на отместването. Като използваме (1), можем да представим (4) и във вида:

$$a = -\omega^2 x,$$

откъдето се вижда, че действително ускорението и отместването са в противофаза (когато отместването достига максималната си стойност, ускорението също има максимална стойност, но в обратна на отместването посока). Зависимостите (1), (3) и (4) на отместването, скоростта и ускорението на трептящата материална точка от времето може да се представят и графично (фиг. 1, в случая началната фаза φ е избрана да бъде 0 , $x = A \sin \omega t$, за опростяване на графиката), където ясно се вижда фазовото отместване на величините x , v и a , а също и факта, че x и a са в противофаза.



фиг. 1