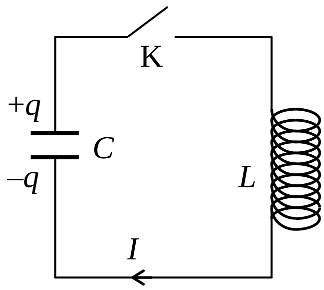
Свободни електромагнитни трептения – незатихващи и затихващи. Основни характеристики, уравнения на движение, диференциални уравнения

Свободни незатихващи електромагнитни трептения

Нека да разгледаме един токов контур, в който се включени кондензатор с капацитет $\boldsymbol{C}$ и намотка с индуктивност $\boldsymbol{L}$ (фиг. 1). Ако кондензаторът е зареден със заряд $\boldsymbol{q}$, между плочите му е създадено напрежение $U = -\Delta\varphi = \frac{q}{C}$ и по контура ще започне да тече ток $I = -\frac{dq}{dt}$ (големините на напрежението и тока трябва да бъдат положителни величини). Ако в контура няма включена индуктивност, токът ще протича до изравняване на потенциалите на плочите на кондензатора (токът не е постоянен). Когато токът тече през намотката обаче, в нея се създава магнитно поле, което се увеличава с увеличаване на тока. Следователно в намотката се индуцира ЕДН на самоиндукция $\varepsilon_i = -L\frac{dI}{dt}$, което, по правилото на Ленц, създава ток в обратна посока на протичащия. Това намалява тока във веригата и той по-бавно достига максималната си стойност. Когато токът започне да намалява, посоката на индуцирания ток се променя (пак по правилото на Ленц) и е в посока на първоначалния ток. Това води до протичане на ток във веригата против посоката на електростатичното поле до зареждане на плочите на кондензатора със заряди, противоположни по знак на началните. Тъй като кондензаторът отново е зареден, пак ще започне да тече ток в контура, но в обратна посока. Ако пренебрегнем съпротивлението $\boldsymbol{R}$ на съединителните проводници и намотката, няма да имаме загуба на енергия за нагряването им и зарядите върху плочите на кондензатора ще се възстановяват до първоначалната си стойност. От закона на Ом за затворената верига на фиг. 1 ще получим:



фиг. 1

(1) $U + \varepsilon_i = IR$

$$\frac{q}{C} - L\frac{dI}{dt} = \frac{q}{C} + L\frac{d^2q}{dt^2} = 0$$

(2) $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0$

Полученото равенство (2) е диференциално уравнение от втори ред и има същия вид, както диференциалното уравнение на хармонично (свободно незатихващо) трептение на пружинно махало. Това ни дава основание да наречем промяната на заряда (тока, напрежението) в контура електромагнитно трептение (в разглеждания идеален случай това е хармонично трептение), а самия контур – трептящ кръг. В конкретния случай (2), величината, която се променя периодично (и отговаря на отклонението $\boldsymbol{x}$ на пружинното махало) е зарядът $\boldsymbol{q}$ върху плочите на кондензатора. Коефициентът пред $\boldsymbol{q}$ в уравнението трябва да е квадратът на кръговата честота на трептението:

$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ (съответно периодът на трептенията е $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{LC}$),

а решенията на (2) трябва да бъдат уравненията на трептението:

(3) $\begin{array}{l} q = q_m \sin(\omega t + \varphi) \\ q = q_m \cos(\omega t + \varphi) \end{array}$,

където $\boldsymbol{q_m}$ и $\boldsymbol{\varphi}$ са двете произволни константи. Амплитудата на това трептение $\boldsymbol{q_m}$ е началният заряд, с който сме заредили кондензатора. Всеки от двата израза (3) може да бъде уравнение на незатихващо електромагнитно трептение. Ако изберем началния момент да бъде моментът в който включваме ключа **K**, зарядът в този момент е максимален ($\boldsymbol{q=q_m \Rightarrow \varphi=0}$) и уравнението на това свободно незатихващо трептение придобива вида:

(4) $q = q_m \cos\omega t$.

Напрежението $\boldsymbol{U}$ между плочите на кондензатора също ще се изменя по периодичен закон, подобен на (4):

(5) $U = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C}\cos\omega t = U_m \cos\omega t$,

където $\boldsymbol{U_m}$ е максималната стойност (амплитудата) на напрежението. Токът $\boldsymbol{I}$ е първата производна на заряда по времето и също ще се изменя по периодичен закон:

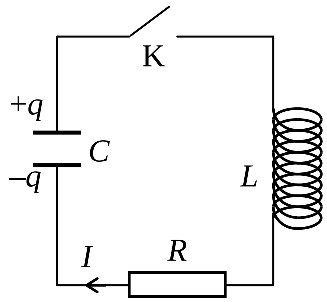
(6) $I = -\dfrac{dq}{dt} = \omega q_m \sin\omega t = I_m \cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Вижда се, че в този случай токът изостава по фаза с **π/2** от напрежението.

Затихващи електромагнитни трептения

В един реален трептящ кръг винаги имаме и някакво съпротивление ***R*** на съединителните проводници и намотката (фиг. 2). Това води до отделяне на топлина и съответно до невъзвратими загуби на енергия. Следователно електромагнитното трептение в реален трептящ кръг е аналогично на затихващо механично трептение, а съпротивлението ***R*** на контура, както ще видим по-нататък, е аналог на коефициентът на триене ***r***. Като имаме предвид и съпротивлението ***R***, законът на Ом (1) за този затворен контур ще се придобие вида:

$$\frac{q}{C} - L\frac{dI}{dt} = RI = -R\frac{dq}{dt}$$



фиг. 2

и диференциалното уравнение на затихващото електромагнитно трептение ще бъде:

$$\frac{q}{C} + L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0$$

(7) $\dfrac{d^2q}{dt^2} + 2\beta\dfrac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0$,

където $\beta = \dfrac{R}{2L}$ е коефициентът на затихване, а $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}$ е собствената кръгова честота. Виждаме, че с така въведените означения, (7) има същия вид, както и диференциалното уравнение на затихващо механично трептение. Следователно, решенията му трябва да имат същия вид:

(8) $$q = q_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi)$$
$$q = q_0 e^{-\beta t}\sin(\omega t + \varphi)$$

с намаляваща амплитуда $q_m(t) = q_0 e^{-\beta t}$ (***q*₀** е началният заряд, с които сме заредили кондензатора) и кръгова честота:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\ .$$

Също както и при механичните трептения, кръговата честота на затихващото трептение **ω** е по-малка от собствената кръгова честота **ω₀** (съответно периодът $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$ е по-голям от $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$).

Всеки от двата израза (8) може да бъде уравнение на затихващо електромагнитно трептение. За затихващите електромагнитни трептения също можем да дефинираме декремент на затихване, като отношението на две съседни амплитуди (които се различават във времето с един период ***T***):

$$\frac{q_m(t)}{q_m(t+T)} = \frac{q_0 e^{-\beta t}}{q_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T}$$

и логаритмичен декремент на затихване:

$$\delta = \ln e^{\beta T} = \beta T = \pi\frac{R}{L}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{4L^2}}}\ .$$