

Принудени електромагнитни трептения – основни характеристики, уравнение на движение, диференциално уравнение. Променлив ток

Свободни незатихващи електромагнитни трептения

Принудени електромагнитни трептения

Ако искаме да поддържаме реално незатихващо трептение, трябва, както и в случая на механичните трептения, да внасяме енергия в системата в подходящ момент, т.е. трябва да включим в трептящия кръг източник на ЕДН (фиг. 1). И в този случай външното ЕДН (също както външната сила при механичните трептения) трябва да се променя по периодичен закон напр.

$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \cos \omega t$, но то трябва да е отместено по фаза на π от фазата на собственото трептение (това е ЕДН, което зарежда кондензатора, т.е. трябва да действа обратно на посоката на електростатичното поле) и при така избраните начален момент и положителна посока на тока, външното ЕДН трябва да бъде $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \cos(\omega t \pm \pi) = -\mathcal{E}_m \cos \omega t$. Законът на Ом за тази верига ще бъде:

$$U + \mathcal{E}_i + \mathcal{E} = IR,$$

а диференциалното уравнение на принуденото трептение ще придобие вида:

$$\frac{q}{C} + L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} = \mathcal{E}_m \cos \omega t$$

$$(1) \frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{\mathcal{E}_m}{L} \cos \omega t$$

Както казахме и за механичните трептения, общото решение на това нехомогенно уравнение (1) се получава от сумата на общото решение на хомогенното уравнение и едно частно решение на (1), което ще търсим пак във вида:

$$(2) q = q_m \cos(\omega t - \psi).$$

Като използваме полученото за затихващите трептения, за амплитудата q_m и началната фаза ψ на (2) можем да запишем:

$$q_m = \frac{\mathcal{E}_m}{L \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}},$$

$$\tan \psi = \frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

и като имаме предвид конкретните стойности на ω_0 и β ($\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $\beta = \frac{R}{2L}$), можем да запишем:

$$(3) q_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\omega \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$(4) \tan \psi = \frac{R}{\frac{1}{\omega C} - \omega L}.$$

Величината $X_L = \omega L$ се нарича индуктивно съпротивление, а $X_C = 1/\omega C$ – капацитивно. Така (3) и (4) могат да се запишат в по-компактен вид:

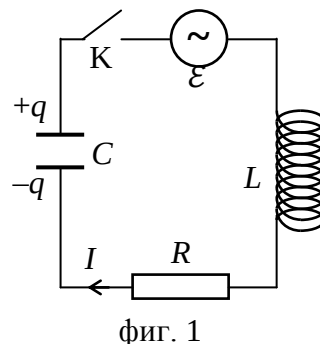
$$q_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\omega \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

$$\tan \psi = \frac{R}{X_C - X_L}.$$

Следователно уравнението на принуденото трептение ще бъде:

$$(5) q = q_0 e^{-\beta t} \cos \omega' t + \frac{\mathcal{E}_m}{\omega \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \cos \left(\omega t - \arctan \frac{R}{X_C - X_L} \right),$$

където:



$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

е кръговата честота на затихващото трептение. Както казахме и принудените механични трептения, първият член на (5) намалява много бързо и след времето за "синхронизация" в трептящия кръг имаме само хармонично трептение с честота ω и амплитуда (3), т.е. уравнението на това трептение се дава само от (2). Следователно, от даден момент нататък напрежението в трептящия кръг е:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \cos(\omega t - \pi),$$

а токът:

$$I = -\frac{dq}{dt} = \omega q_m \sin(\omega t - \psi) = I_m \cos\left(\omega t - \psi - \frac{\pi}{2}\right) = I_m \cos\left(\omega t - \pi - \left(\psi - \frac{\pi}{2}\right)\right) = I_m \cos(\omega t - \pi - \varphi),$$

т.е. токът изостава по фаза от напрежението с $\varphi = \psi - \frac{\pi}{2}$. В съответствие с (4):

$$(6) \tan \varphi = \tan\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan \psi} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \frac{X_L - X_C}{R}.$$

Максималната стойност (амплитудата) на тока ще бъде:

$$(7) I_m = \omega q_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}.$$

Променлив ток

Променлив ток наричаме всеки ток, чиято посока или големина се променя във времето. Електромагнитните трептения, които разгледахме досега, са най-простия случай на протичане на променлив ток в една електрична верига. Обикновено когато се говори за променлив ток (напр. в бита или промишлеността) се разбира синусоидален ток с постоянна амплитуда, т.е. това е принуденото електромагнитно трептение, което разгледахме. Ако ЕДН на източника (фиг. 1) се изменя по закона:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \cos \omega t,$$

токът във веригата ще изостава по фаза от напрежението с φ :

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi).$$