

## Затихващи и принудени трептения – основни характеристики, уравнения на движение, диференциални уравнения. Резонанс.

### Затихващи трептения

В реалните трептящи системи винаги действат някакви сили на триене и съпротивление на средата. Това води до постепенно намаляване на механичната енергия на трептящата материална точка, а следователно и до намаляване на амплитудата на трептенията с течение на времето. В зависимост от силите на съпротивление, след определено време трептението се прекратява. **Трептения, чиято амплитуда намалява с течение на времето се наричат затихващи трептения.** Тези трептения не са истински периодични движения, защото трептящото тяло не преминава през равни интервали от време през еднакви състояния (максималното отклонение всеки път е по-малко от предходния), но уравнението им на движение е сходно с това на хармоничните трептения и можем условно да ги наричаме периодични, ако коефициентът на триене (или съпротивление) на средата е постоянен. Видяхме, че уравнението на движение е решение на диференциалното уравнение на трептението т.е. първо ще трябва да получим диференциалното уравнение на затихващото трептение. Ще го получим както в 8 въпрос за хармоничните трептения – от втория принцип на Нютон (4 въпрос, Физика 1), като пак разглеждаме пружинно махало. В този случай освен възвръщащата сила  $F = -kx$ , на тялото действа и сила на съпротивление, която е насочена обратно на посоката на движение и при малки скорости зависи линейно от скоростта –  $F_s = -rv$  ( $r$  е коефициентът на триене (съпротивление) на средата и предполагаме, че е постоянен). Като използваме принципа на суперпозицията (4 въпрос, Физика 1), за ускорението ще получим:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n F_i}{m} = -\frac{k}{m}x - \frac{r}{m}v$$

и като отчетем, че скоростта е първа производна, а ускорението – втора производна на координатата  $x$  по времето, ще получим диференциалното уравнение на затихващото трептение:

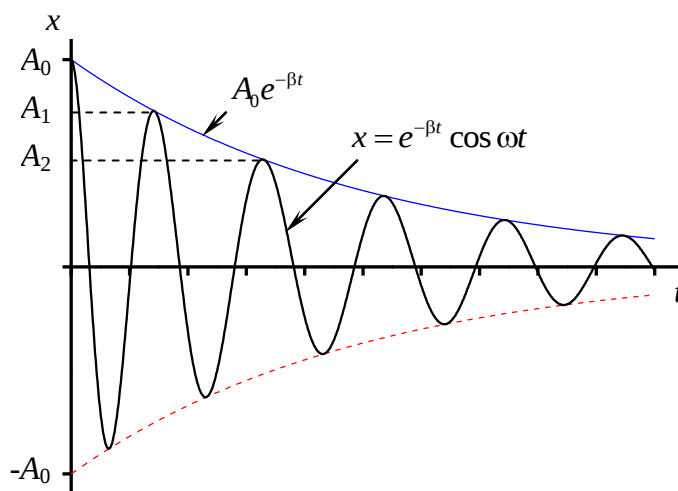
$$(1) \frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0,$$

като в (1) сме положили отношението  $\frac{r}{m} = 2\beta$ ,  $\beta$

се нарича коефициент на затихване, а  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  е

т.нар. собствена кръгова честота на трептението (кръговата честота на хармоничното трептение, ако няма сила на триене) – това е същата кръгова честота, която получихме в 8 въпрос. Виждаме, че (1) също е линейно хомогенно уравнение от втори ред. Решенията му са:

$$(2) \begin{aligned} x &= A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) \\ x &= A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$



фиг. 1

и също зависят от две произволни константи –  $A_0$  и  $\varphi$ , които се определят от началните условия. Виждаме, че видът на (2) е същият, както на уравнението на движение на хармоничното трептение, ако приемем величината  $A = A_0 e^{-\beta t}$  за променлива амплитуда на трептението. Тъй като  $e^{-\beta t}$  е намаляваща функция, амплитудата при всяко преминаване през положението на максимално отклонение с течение на времето ще бъде все по-малка от началната си стойност  $A_0$ . **Зависимостта (2) е уравнението на движение на затихващо трептение.** Графиката на уравнението на движение на затихващо трептение (2) е представена на фиг. 1.

Основните характеристики на едно принудено трептение вече са четири – освен началната амплитуда  $A_0$ , началната фаза  $\varphi$  и кръговата честота  $\omega$ , трябва да знаем и коефициентът на затихване  $\beta$ . Началната амплитуда  $A_0$  и началната фаза  $\varphi$ , също както и при хармоничните трептения, зависят от началните условия, а коефициентът на затихване  $\beta$  – от коефициентът на триене  $r$  и масата на тялото  $m$ . Кръговата честота на затихващите трептения  $\omega$ , за разлика от хармоничните трептения, вече не е характеристика само на трептящата система, а зависи и от средата чрез коефициентът на затихване  $\beta$ .

Стойността ѝ може да се получи като заместим  $x$  от (2) (и производните му) в (1) и решим полученото уравнение:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

и виждаме, че  $\omega$  е по-малка от собствената честота  $\omega_0$ .

Ще дефинираме и период  $T$  на затихващите трептения като времето между две преминавания през равновесното положение:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Виждаме, че  $T$  е по-голям от периода на незатихващите трептения  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ , но ако  $\beta \ll \omega_0$ , почти не се отличава от него.

Отношението на две съседни амплитуди (амплитудите при две последователни преминавания през максималното отклонение (фиг. 1), времето между тях се различава с един период  $T$ ) е постоянна величина, която зависи само от коефициента на затихване  $\beta$  и периодът  $T$ :

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_0}{A_0 e^{-\beta T}} = e^{\beta T}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_0 e^{-\beta T}}{A_0 e^{-2\beta T}} = e^{\beta T}$$

и се нарича декремент на затихване. Натуралният логаритъм от декремента на затихване се нарича логаритмичен декремент на затихване:

$$\delta = \ln e^{\beta T} = \beta T$$

и също е една от основните характеристики на реалните (затихващи) трептящи системи.

### Принудени трептения

Едно затихващо трептение може да се превърне в незатихващо, ако предаваме на системата енергия отвън, която да компенсира загубите вследствие триенето и съпротивлението на средата. Такова трептение се нарича принудено трептение. Тази енергия се предава чрез извършване на работа от някаква външна сила. Тъй като работата може да бъде положителна или отрицателна в зависимост от посоката на силата и преместването, ако се опитаме да предадем енергия в неподходящ момент (силата действа в посока, обратна на преместването на трептящото тяло в дадения момент), може да постигнем обратен ефект – вместо да предадем, да отнемем енергия от системата. Следователно не можем да предизвикаме принудени трептения с постоянна сила – тя действа винаги в една посока и през част от времето ще отнема енергия от системата. **Принудено трептение се осъществява, когато на една трептяща система действа периодична сила** напр.  $F \cos \omega t$ . Под действие на тази периодична сила системата ще започне да трепти със същата честота, с която се променя силата (след първоначален период на "синхронизация"), тъй като така ще приема енергията в подходящия момент. Диференциалното уравнение ще получим от втория принцип на Нютон, като отчетем и действието на външната периодична сила:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n F_i}{m} = -\frac{k}{m}x - \frac{r}{m}v + \frac{F}{m} \cos \omega t,$$

$$(3) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f \cos \omega t.$$

Означили сме отношението  $\frac{F}{m} = f$  за опростяване на записа на уравнението. Това е нехомогенно диференциално уравнение и решението му се получава като сума от общото решение  $x_0$  на хомогенното уравнение (1) и едно частно решение  $x_1$  на (3). Ние знаем общото решение на (1) – това са функции от вида (2). Можем да си изберем за  $x_0$  напр.:

$$(4) \quad x_0 = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \varphi'),$$

като с  $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  и  $\varphi'$  сме означили кръговата честота и началната фаза на затихващото трептение, тъй като те може да се различават от кръговата честота  $\omega$  и началната фаза  $\varphi$  на принуденото трептение.

Остава да намерим едно частно решение на (3) т.е. решение, което не съдържа произволни константи. Ще го търсим във вида:

$$(5) \quad x_1 = A \cos(\omega t - \varphi).$$

Трябва да намерим такива стойности на  $A$  и  $\varphi$ , при които се удовлетворява (3). Ще постъпим както при определянето на кръговата честота на затихващите трептения – ще заместим  $x$  и производните му в (3) и ще се опитаме да решим полученото уравнение:

$$\frac{dx_1}{dt} = -\omega A \sin(\omega t - \varphi) = \omega A \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t - \varphi) = \omega^2 A \cos(\omega t - \varphi + \pi)$$

$$(6) \quad \omega^2 A \cos(\omega t - \varphi + \pi) + 2\beta\omega A \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + \omega_0^2 A \cos(\omega t - \varphi) = f \cos \omega t.$$

Полученото уравнение (6) има вид на сума от хармонични трептение в едно направление (10 въпрос). Затова е най-лесно да бъдат определени  $A$  и  $\varphi$  от него чрез векторна диаграма (фиг. 2). Третият член на сумата има амплитуда  $\omega_0^2 A$  и начална фаза  $(-\varphi)$ , следователно векторът сключва ъгъл  $\varphi$  с оста  $X$  по посока на часовниковата стрелка. Вторият член на сумата е отместен от третия на ъгъл  $(+\pi/2)$  и има амплитуда  $2\beta\omega A$ , а първият е отместен спрямо третия на ъгъл  $(+\pi)$  и има амплитуда  $\omega^2 A$ . Сумата от трите вектора трябва да дава векторът от дясната страна на (6) с амплитуда  $f$  и начална фаза  $0$ . От векторната диаграма (фиг. 2) и от полученото в 10 въпрос следва:

$$f^2 = \frac{F^2}{m^2} = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 A^2 + 4\beta^2 \omega^2 A^2$$

$$(7) \quad A = \frac{F}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}},$$

а за ъгъла  $\varphi$  получаваме:

$$\tan \varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

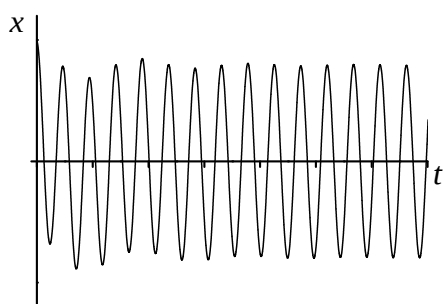
$$(8) \quad \varphi = \arctan \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Така, като заместим (7) и (8) в (5), частното решение придобива вида:

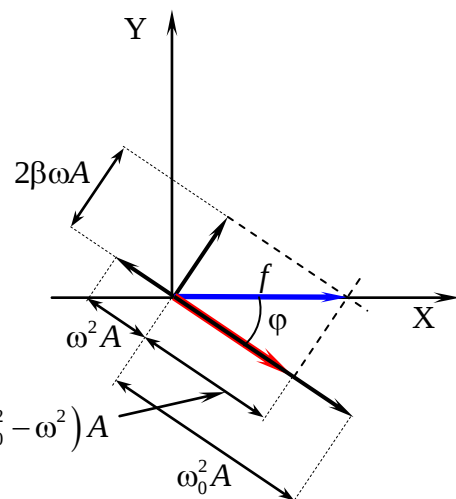
$$(9) \quad x_1 = \frac{F}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \cos\left(\omega t - \arctan \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right),$$

а общото решение на (3), т.е. уравнението на движение на принуденото трептение, ще получим от сумата на (4) и (9):

$$(10) \quad x = x_0 + x_1 = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \varphi') + \frac{F}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \cos\left(\omega t - \arctan \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right).$$



фиг. 3



фиг. 2

Трябва да отбележим, че първият член на (10) намалява много бързо (времето за "синхронизация"), след което само вторият член оказва влияние т.е. на практика принуденото трептение от даден момент нататък е хармонично трептение с кръгова честота равна на кръговата честота  $\omega$  на външната сила и амплитуда (7) (фиг. 3).

### Резонанс

Виждаме (7), че амплитудата на принуденото трептение зависи освен от големината на външната сила (нейната амплитуда  $F$ ) и от честотата  $\omega$  на външната сила. Това означава, че при една и съща амплитуда  $F$  на външната сила, при определена честота е възможно увеличаване на амплитудата (7) на принуденото трептение. Тази честота, при която системата най-лесно

откликва на външно въздействие, се нарича резонансна честота  $\omega_r$ , а явлението, при което амплитудата на принуденото трептене се увеличава многократно (в идеалния случай, при отсъствие на съпротивление на средата – до безкрайност), се нарича резонанс. Резонансната честота  $\omega_r$  можем да намерим като определим максимума на амплитудата (7), чиято графика за различни стойности на  $\beta$  е показана на фиг. 4, в зависимост от честотата  $\omega$  т.е. минимума на величината под корена в знаменателя. Трябва да определим първата производна на тази величина по  $\omega$  и да я приравним на 0:

$$-4(\omega_0^2 - \omega^2 - 2\beta^2)\omega = 0.$$

Това уравнение има три корена:  $\omega = 0; \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ .

Първият отговаря на максимум (може да се провери чрез втората производна) на подкоренната величина и следователно минимум на амплитудата, а отрицателният корен няма физически смисъл. Така за резонансната честота на принуденото трептене получаваме:

$$(11) \quad \omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2},$$

а за стойността на амплитудата  $A_r$  при резонанс, като заместим (11) в (7):

$$(12) \quad A_r = \frac{F}{2\beta m \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

От (11) следва, че резонансната честота  $\omega_r$  е винаги по-малка от собствената честота  $\omega_0$  на трептението и намалява с увеличаване на коефициента на затихване  $\beta$  (фиг. 4). Ако

коефициентът на затихване е много голям ( $\beta > \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ ,  $\beta_6$  на фиг. 4), изразът (11) става имагинерен т.е.

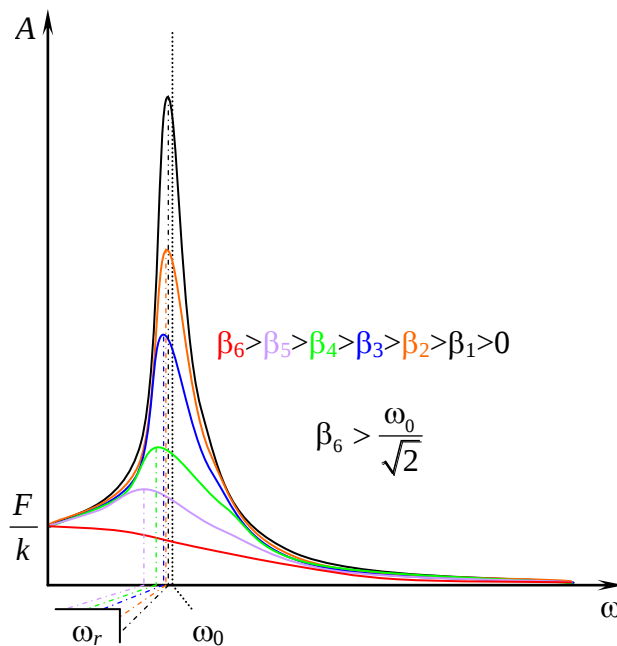
резонанс няма да се наблюдава при никаква реална честота (няма максимум на резонансната крива). Същото е валидно и за (12) – амплитудата при резонанс е толкова по-голяма, колкото е по-малко  $\beta$  (фиг. 4) и при  $\beta > \omega_0$  става имагинерна т.е. изобщо няма трептене. От (11) и (12) се вижда също, че в идеалния случай ( $\beta=0$ ) резонансната честота  $\omega_r$  е равна на собствената честота на системата, а резонансната амплитуда  $A_r$  клони към безкрайност.

Представените на фиг. 4 резонансни криви на амплитудата  $A$  на принуденото трептене (7) от честотата  $\omega$  на външната сила потвърждават изводите, които направихме при анализа на (11) и (12). Виждаме, че колкото е по-малко  $\beta$ , толкова по-висок и по-остър е максимумът (резонансната амплитуда), а положението му  $\omega_r$  по оста  $\omega$  (резонансната честота) се измества по-надясно и се доближава до собствената честота на трептението  $\omega_0$ . От фиг. 4 можем да направим още няколко извода.

Когато честотата  $\omega \rightarrow 0$ , всички резонансни криви клонят към една и съща стойност  $-\frac{F}{m\omega_0^2} = \frac{F}{k}$  (7) –

това е отклонението, което получава системата при постоянна сила (когато  $\omega=0$  силата  $F\cos\omega t$  не зависи от времето  $t$  и не може да предизвика принудено трептене). Когато честотата  $\omega \rightarrow \infty$ , всички резонансни криви асимптотично клонят към нула (7) – силата се променя толкова бързо, че системата няма време да реагира на въздействието.

Явлението резонанс (при механични, електромагнитни и др. трептения) намира много широко приложение в техниката и практиката напр. при настройване на радиоприемник или телевизор на определена честота.



фиг. 4