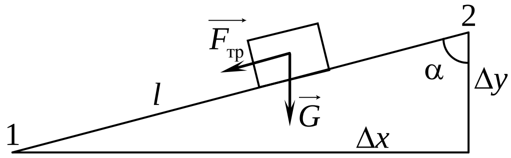
Консервативни сили. Потенциална енергия. Връзка между работа и потенциална енергия. Закон за изменение и запазване на пълната механична енергия

Консервативни сили. Потенциална енергия. Връзка между работа и потенциална енергия

Нека да пресметнем работата, извършена от различни сили. При издигане на тяло по наклонена равнина от т. **1** до т. **2** (фиг. 1), на тялото действат няколко сили – силата, която го издига, силата на тежестта, силата на триене и силата на реакция на опората. Ние ще се интересуваме от работата на силата на тежестта и силата на триене. И двете сили са постоянни по големина и посока и можем да приложим формулата за работа на постоянна сила:



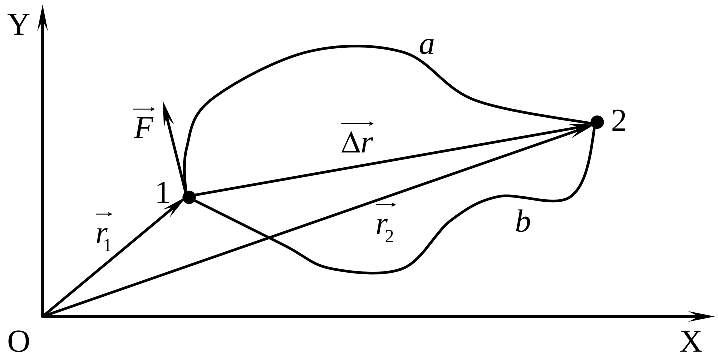
фиг. 1

$A = \left|\vec{F}_{\text{тр}}\right|\left|\vec{\Delta r}\right|\cos\pi = -kNl = -kGl\sin\alpha = -kG\Delta x$ – за силата на триене;

(1) $A = \left|\vec{G}\right|\left|\vec{\Delta r}\right|\cos(\pi-\alpha) = -Gl\cos\alpha = -G\Delta y$ – за силата на тежестта.

Ако върнем тялото обратно в началното му положение в т. **1**, работата на силата на триене ще бъде същата, защото силата и преместването пак ще сключват ъгъл π (силата на триене е винаги в посока обратна на движението), докато работата на силата на тежестта ще бъде с обратен знак (защото ъгълът между посоката на силата и посоката на преместването в този случай ще бъде α). Следователно работата, извършена от силата на триене по затворения контур **1–2–1** ще бъде $-2kG\Delta x$, докато работата на силата на тежестта ще бъде **0**, т.е. работата на силата на тежестта не зависи от изминатия път, а само от преместването (началното и крайното положение на тялото). Такива сили, чиято работа не зависи от изминатия път, а само от началното и крайното положение на тялото, се наричат консервативни (или потенциални) сили. Силата на тежестта е пример за консервативна сила, силата на триене – за неконсервативна.

Това разсъждение е валидно и за произволна консервативна сила (фиг. 2). При преместване на тялото от т. **1** до т. **2** по траектория ***a*** (под действие на всички сили приложени към тялото), консервативната сила $\vec{F}$ ще извърши работа $A_{1\text{-}a\text{-}2}$, а по траектория ***b*** – A_{1-b-2}. Тъй като работата на консервативната сила не трябва да зависи от траекторията:



фиг. 2

$A_{1-a-2} = A_{1-b-2}$;

$A_{1-b-2} = -A_{2-b-1}$;

$A_{1-a-2-b-1} = A_{1-a-2} + A_{2-b-1} = A_{1-a-2} - A_{1-b-2} = 0$.

Работата на произволна сила по затворен контур може да се изрази математически чрез интеграл по затворения контур L (**1–*a*–2–*b*–1**):

$$A = \oint_L \vec{F}.\vec{dr},$$

т.е. математически условието за консервативност на една сила $\vec{F}$ ще бъде:

$$A = \oint_L \vec{F}.\vec{dr} = 0$$

Силово поле, в което действат консервативни (потенциални) сили, се нарича потенциално поле. Всички тела, които се намират в потенциално поле, притежават определен вид енергия, която се нарича потенциална енергия ***U***. Тя е скаларна величина и е свързана с взаимното разположение на телата, които си взаимодействат (с консервативни сили), и зависи от техните координати (радиус-вектори), т.е. ***U*** е функция на координатите в избраната отправна система – $U(\vec{r}) = U(x, y, z)$. Следователно потенциална енергия на дадено тяло винаги е свързана с другите тела, с които то взаимодейства. Не можем да говорим за потенциална енергия на изолирано (свободно) тяло. Доколкото ***U*** зависи от $\vec{r}$, т.е. от отправната система, нейното определяне също е нееднозначно, но промяната ѝ (което всъщност ни интересува) не зависи от отправната система. Обикновено се приема, че потенциалната енергия е **0** на някакво място и стойността ѝ се отчита спрямо това място. За движение на тела близо до Земята за такова място най-често се приема земната повърхност.

Нека сега се опитаме да определим връзката между работата на консервативната сила и потенциалната енергия на тялото. Изменението на потенциалната енергия ΔU (както и на всички видове енергия) е свързана с извършване на работа. Тъй като U се определя от взаимодействие на телата чрез консервативни сили, естествено е да предположим, че работата се извършва от действащата консервативна сила. Тъй като работата е мярка за изменението на енергията, колкото повече се променя потенциалната енергия, толкова по-голяма работа трябва да може да извърши консервативната сила т.е. извършената работа A по големина трябва да е равна на промяната на потенциалната енергия ΔU. Остава да определим знака на извършената работа (тя е алгебрична величина и може да бъде както положителна, така и отрицателна). Ще го направим на базата на пример със сила, която показахме, че е консервативна – силата на тежестта $\vec{G}$. Ако едно тяло пада свободно от височина h, работата на $\vec{G}$ ще бъде толкова по-голяма, колкото по голяма е h. Следователно колкото е по-голяма височината над земната повърхност, на която е издигнато тялото, толкова по-голяма ще бъде и потенциалната му енергия. Ако тялото се премества от височина h_1 до височина h_2 ($h_2<h_1$), силата на тежестта ще извърши работа (1):

(2) $A = G\left|\overrightarrow{\Delta r}\right| = G\left(h_1 - h_2\right) > 0$,

тъй като силата и преместването са еднопосочни (**cos**α**=1**), а големината на преместването $\left|\overrightarrow{\Delta r}\right| = h_1 - h_2$ ($\left|\overrightarrow{\Delta r}\right|$ трябва да е положителна величина). При това преместване обаче, потенциалната енергия на тялото намалява, защото намалява височината над земната повърхност. Следователно при извършване на положителна работа от консервативната сила, потенциалната енергия на тялото намалява и обратно – ако работата на консервативната сила е отрицателна (при издигане на тялото силата на тежестта и преместването са противопосочни, **cos**α**=–1,** $A<0$), потенциалната енергия на тялото се увеличава. Такава връзка съществува не само за силата на тежестта, а и за всяка консервативна сила и може да се запише като:

(3) $A = -\Delta U$,

т.е. работата на консервативната сила е равна на взетата със знак минус промяна на потенциалната енергия на тялото. С други думи консервативната сила върши работа за сметка на потенциалната енергия на тялото. От (3) се вижда, че потенциалната енергия, също както работата, се измерва в джаули. За много малко преместване $\overrightarrow{dr}$, (3) може да се запише като:

(4) $dA = -dU$.

В конкретния пример, който разгледахме, за потенциалната енергия на тяло в полето на силата на тежестта (като примем за нулево потенциално ниво земната повърхност) ще получим, че тяло, намиращо се на височина h над земната повърхност, притежава потенциална енергия, която е равна на взетата със знак минус работа на силата на тежестта при издигането му до тази височина. От (1), (2) и (3):

$$\Delta U = U\left(h\right) - U\left(0\right) = -A = -G\left(h-0\right)\cos\pi = Gh = mgh,$$

$$U\left(h\right) = mgh.$$

Като използваме (4) и определението за работа на сила (7 въпрос), можем да намерим връзка и между потенциалната енергия на тялото и самата консервативна сила:

$$dA = \vec{F}.\overrightarrow{dr} = -dU$$

(5) $\vec{F} = -\dfrac{dU}{\overrightarrow{dr}} = -gradU$

Символът „***grad***" изразява векторна математическа функция, наречена градиент. Както се вижда от (5), тази функция представлява векторна производна на скаларна величина по радиус-вектора $\vec{r}$. Физическият смисъл на (5) е, че големината на консервативната сила се дава от промяната на потенциалната енергия на тялото с преместването, а посоката ѝ е в посока на намаляване на потенциалната енергия.

Като използваме принципа на суперпозицията, можем да представим силата $\vec{F}$ като сума от трите ѝ компоненти $\vec{F_x}$, $\vec{F_y}$ и $\vec{F_z}$ по осите **X, Y** и **Z**, а преместването $\overrightarrow{dr}$ – като сума от безкрайно малките премествания $\overrightarrow{dx}$, $\overrightarrow{dy}$ и $\overrightarrow{dz}$ по тези оси. Потенциалната енергия е скаларна величина и няма проекции върху осите – тя се определя само от местоположението на тялото, без значение от начина, по който сме достигнали дотам. Тогава (5) може да се представи чрез три равенства за компонентите на силата $\overrightarrow{F_x}$, $\overrightarrow{F_y}$ и $\overrightarrow{F_z}$ като производни на потенциалната енергия на тялото ***U*** по трите координати:

$$\overrightarrow{F_x} = -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial\overrightarrow{x}}$$

$$(6)\quad \overrightarrow{F_y} = -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial\overrightarrow{y}}.$$

$$\overrightarrow{F_z} = -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial\overrightarrow{z}}$$

Заменили сме в (6) обикновените производни с частни, тъй като ***U*** е функция на трите координати (функция на **3** променливи), а ние взимаме производна само по една от тях.

Закон за изменение и запазване на пълната механична енергия

Видяхме, че едно тяло може да притежава два вида механична енергия – кинетична ***T*** и потенциална ***U***. Сумата от кинетичната и потенциалната енергия на едно тяло ***E=T+U*** се нарича пълна механична енергия на тялото. Тъй като е сума от енергии, мерната ѝ единица също е джаул. Енергията, както казахме, е адитивна величина и следователно пълната механична енергия на механична система от тела ще бъде равна на сумата от пълните механични енергии на отделните тела:

$$(7)\quad E = \sum_{i=1}^{n} E_i = \sum_{i=1}^{n} (T_i + U_i).$$

Нека да видим по какъв начин може да се променя пълната механична енергия на една механична система. Казахме, че всяка промяна на енергията е свързана с извършване на работа, а следователно и с действие на сили. Ако имаме една произволна механична система, в нея трябва да действат няколко вида сили – вътрешни и външни, консервативни и неконсервативни. Поне една от вътрешните сили трябва да е консервативна, за да може телата да притежават потенциална енергия. Ако всички вътрешни сили са консервативни, системата се нарича консервативна. Под действие на всички сили, всяко от телата в системата получава някакво ускорение $\overrightarrow{a_i}$ (втори принцип на Нютон):

$$(8)\quad \begin{aligned} \overrightarrow{a_i} &= \frac{1}{m_i}\left(\overrightarrow{f_{iвк}} + \overrightarrow{f_{iвн}} + \overrightarrow{F_i}\right) \\ m_i\overrightarrow{a_i} &= \left(\overrightarrow{f_{iвк}} + \overrightarrow{f_{iвн}} + \overrightarrow{F_i}\right) \end{aligned},$$

където с $\overrightarrow{f_{iвк}}$ и $\overrightarrow{f_{iвн}}$ сме означили съответно равнодействащите на вътрешните консервативни и неконсервативни сили, а с $\overrightarrow{F_i}$ – равнодействащата на външните сили, действащи на тялото с номер ***i***. За да определим промяната на енергията на тялото, трябва да пресметнем работата, която извършват всички сили върху него. Затова умножаваме скаларно второто равенство от (8) с безкрайно малкото преместване на тялото $\overrightarrow{dr_i}$, което то получава под действие на всички сили.

$$\begin{aligned} m_i\overrightarrow{a_i} &= \left(\overrightarrow{f_{iвк}} + \overrightarrow{f_{iвн}} + \overrightarrow{F_i}\right) \quad |.\overrightarrow{dr_i} \\ m_i\overrightarrow{a_i}.\overrightarrow{dr_i} &= \left(\overrightarrow{f_{iвк}} + \overrightarrow{f_{iвн}} + \overrightarrow{F_i}\right).\overrightarrow{dr_i} \end{aligned}.$$

Като използваме изводът, направен в 7 въпрос за нарастването на ***T*** (***dT=mvdv***), виждаме че, лявата част на равенството представлява безкрайно малкото нарастване на кинетичната енергия на тялото ***dT***$_i$. От определението за работа на сила ($dA = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dr}$) и (4) следва че, дясната част на равенството е сума от работите dA_i на външните и $dA_{iвн}$ на неконсервативните сили и взетата със знак минус промяна на потенциалната енергия на тялото:

$$\begin{aligned} m_i v_i dv_i &= \overrightarrow{f_{iвк}}.\overrightarrow{dr_i} + \overrightarrow{f_{iвн}}.\overrightarrow{dr_i} + \overrightarrow{F_i}.\overrightarrow{dr_i} \\ dT_i &= -dU_i + dA_{iвн} + dA_i \end{aligned}.$$

Последното равенство може да се преобразува, за да получим изменението на пълната енергия $\boldsymbol{E_i}$ на тялото, а като използваме адитивността на работата и енергията и (7) – и на пълната енергия $\boldsymbol{E}$ на системата:

$$dT_i + dU_i = dA_{i\text{вн}} + dA_i$$

$$d\left(T_i + U_i\right) = dE_i = dA_{i\text{вн}} + dA_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} dE_i = \sum_{i=1}^{n} dA_{i\text{вн}} + \sum_{i=1}^{n} dA_i$$

$$d\sum_{i=1}^{n} E_i = d\sum_{i=1}^{n} A_{i\text{вн}} + d\sum_{i=1}^{n} A_i$$

(9) $dE = dA_{\text{вн}} + dA$.

Следователно, промяната на пълната механична енергия $\boldsymbol{dE}$ на една механична система е сума от работата $\boldsymbol{dA_{\text{вн}}}$ на неконсервативните вътрешни сили и работата $\boldsymbol{dA}$ на външните сили т.е. механичната енергия на една механична система може да се промени само ако ѝ действат външни или неконсервативни сили. Ако системата е затворена (не действат външни сили) и консервативна (няма вътрешни неконсервативни сили), то и работата на външните и неконсервативни сили ще бъде нула, а механичната енергия на системата няма да се променя:

(10) $dE = 0 \quad E = \text{const}$.

Тези равенства (10) изразяват закона за запазване на пълната механична енергия: Пълната механична енергия на затворена консервативна система не се променя с времето.

Законът за запазване на пълната механична енергия е частен случай на по-общия закон за запазване на енергията. Видяхме, че ако в системата действат неконсервативни сили, част от механичната енергия се преобразува чрез работата на тези сили. Тази енергия обаче не се губи, ако системата е затворена (не действат външни сили), а се преобразува в друг вид енергия на системата (най-често в топлинна, под действие на силите на триене и съпротивление). Така можем да формулираме общия закон за запазване на енергията: Пълната енергия (сумата от всички видове енергии) на затворена система не се променя с времето.