Динамика на въртеливо движение. Кинетична енергия при въртеливо движение. Инерционен момент. Работа на сила при двумерно въртене. Момент на сила. Основно динамично уравнение

Кинетична енергия при въртеливо движение. Инерционен момент

С въвеждането на ъгловите кинематични величини вече можем да описваме въртеливите движения на телата. За да си изясним причините за движението обаче, трябва да въведем и еквивалентните динамични и енергетични величини за въртеливо движение и да видим каква е връзката им със съответните величини при постъпателните движения.

Тук, за разлика от въвеждането на величините при постъпателно движение, ще използваме по-различен подход – ще въвеждаме едновременно енергетичните и динамичните величини при въртеливо движение и ще ги дефинираме чрез връзките им със съответните величини при постъпателно движение.

Нека да пресметнем кинетичната енергия на тяло при двумерно въртене. Тъй като тя е адитивна величина, можем да намерим първо израз за кинетичната енергия на една материална точка от тялото и да сумираме по всички точки. Всяка материална точка от тялото, с маса m_i, се движи по окръжност с радиус R_i с линейна скорост v_i. Следователно кинетичната ѝ енергия T_i ще бъде:

$$T_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega_i^2 = \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2 .$$

Използвали сме връзката между линейна и ъглова скорост (10 въпрос) и факта, че ъгловата скорост на всички точки от тялото е еднаква (това беше и смисълът на въвеждането на тази величина). Величината $I_i = m_i R_i^2$ се нарича инерционен (инерчен) момент на материална точка спрямо дадена ос. Тогава изразът за T_i придобива вида:

$$T_i = \frac{1}{2} I_i \omega^2 .$$

Както казахме, кинетичната енергия е адитивна величина и за да получим кинетичната енергия на въртящото се тяло трябва да сумираме кинетичните енергии на всичките му материални точки:

$$T = \sum_{i=1}^{n} T_i = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} I_i\right)\omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 .$$

Величината $I = \sum_{i=1}^{n} I_i$ се нарича инерционен момент на тялото спрямо дадената ос на въртене.

Виждаме, че ако тялото се върти около неподвижна ос, то може да притежава кинетична енергия независимо, че не променя местоположението си в пространството т.е. не се движи постъпателно. Тъй като кинетичната енергия е адитивна величина, ако тялото извършва едновременно и постъпателно и въртеливо движение (напр. топка се търкаля), пълната му кинетична енергия трябва да е сума от кинетичните енергии на постъпателно и въртеливо движение:

$$T = T_1 + T_2$$

$$(1) \quad T_1 = \frac{1}{2} m v_C^2 ,$$

$$T_2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

където m е масата на тялото, v_C е скоростта на центъра на масите (центъра на инерция, 9 въпрос), тъй като при постъпателно движение можем да считаме тялото за материална точка с маса m, движеща се със скорост v_C, (9 въпрос), I е инерционният момент на тялото спрямо избраната ос на въртене, а ω – ъгловата му скорост спрямо тази ос.

Нека да разгледаме по-подробно важната величина инерционен момент. Ако сравним изразите за кинетична енергия при постъпателно и въртеливо движение (1), виждаме, че на линейната скорост в T_1 отговаря ъгловата скорост в T_2, а на масата в T_1 – инерционният момент в T_2. Следователно инерционният момент I на въртящо се тяло е скаларна величина, еквивалентна на масата m при постъпателните движения т.е. определяща инертността при въртеливи движения. По големина се определя от:

$$I = \int_V R^2 dm ,$$

като интегрирането се извършва по целия обем ***V*** на тялото, на всяка физически малка маса ***dm***, намираща се на разстояние ***R*** от оста на въртене. Ако разпределението на масата не е непрекъснато (т.е. можем да разглеждаме тялото като съставено от отделни материални точки), можем да използваме формулата, която написахме по-горе:

$$I=\sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 .$$

От определението се вижда, че мерната единица е [**kg.m²**].

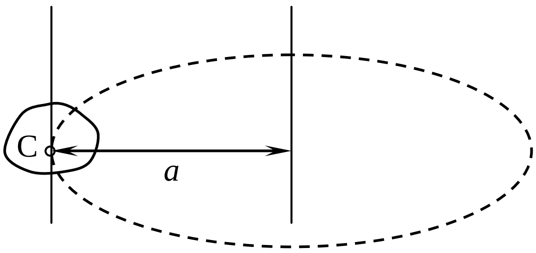
Трябва да отбележим някои важни различия между масата и инерционния момент:

1. Инерционният момент на дадено тяло се определя винаги спрямо ос. Ако едно тяло може да се върти около различни оси, то ще има различни инерционни моменти при въртене около всяка от тях. Масата на тялото обаче, остава неизменна, независимо как се движи то.
2. Инерционният момент, както се вижда от определението, зависи не само от масата на тялото, а и от нейното разпределение. Две тела с еднаква маса, форма и размери, могат да имат различни инерционни моменти спрямо дадена ос. Ако променим разпределението на масите в едно тяло, можем да променим инерционния му момент, но не и масата му.
3. Инерционният момент, за разлика от масата, зависи от формата и размерите на тялото.

Инерционните моменти на телата обикновено се пресмятат спрямо ос, която минава през центъра на инерция на тялото. Тези стойности се дават в справочниците. Ако искаме да пресметнем инерционния момент ***I*** спрямо произволна ос (фиг. 1), използваме теоремата на Щайнер:

$$I=I_{\mathrm{C}}+ma^2,$$

където $\boldsymbol{I_{\mathrm{C}}}$ е инерционния момент на тялото спрямо ос, успоредна на дадената и минаваща през центъра на инерция **C**, а ***a*** е разстоянието между двете оси.

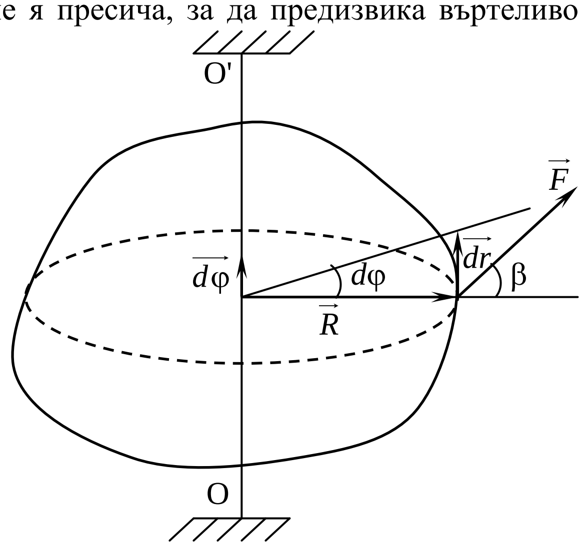


фиг. 1

Работа на сила при двумерно въртене. Момент на сила. Основно динамично уравнение

Казахме, че движенията на едно твърдо тяло могат да се разделят най-общо на постъпателни и въртеливи. Тъй като движението се предизвиква от сила, ще изясним под действие на какви външни сили едно тяло извършва различните видове движения. Ако направлението на силата минава през центъра на масите, тя предизвиква постъпателно движение на тялото. При всяко друго направление на силата, тя ще предизвиква и въртеливо движение на тялото. За случая на двумерно въртене, който ние разглеждаме, нещата се опростяват значително. Доколкото оста е фиксирана неподвижно, тялото не може да се движи постъпателно. Ако направлението на силата пресича оста на въртене или е успоредна на нея, тя не може да предизвика и въртеливо движение. Следователно, при въртене около фиксирана ос, силата трябва да сключва с оста ъгъл, различен от **0** и да не я пресича, за да предизвика въртеливо движение.

Резултатът от действието на една сила най-често се измерва с работата, която тя извършва. Затова ще пресметнем работата на външната сила $\vec{F}$, която е приложена в точка от тялото, намираща се на разстояние ***R*** от оста на въртене, направлението ѝ е перпендикулярно на оста на въртене и сключва ъгъл **β** с вектора $\vec{R}$ (дефиниран както в 10 въпрос) (фиг. 2). За интервал от време ***dt*** тялото ще се завърти на ъгъл $\overrightarrow{d\varphi}$, а преместването на приложната точка на силата ще бъде $\overrightarrow{dr}$. Като имаме предвид, че $\overrightarrow{dr}\perp\vec{R}$ и връзката между $\overrightarrow{dr}$ и $\overrightarrow{d\varphi}$, получена в 10 въпрос, за работата ***dA*** (7 въпрос) ще получим:



фиг. 2

$$(2)\quad dA=\vec{F}.\overrightarrow{dr}=Fdr\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=FRd\varphi\sin\beta .$$

Произведението ***FR*sinβ** е големината на векторното произведение на векторите $\vec{F}$ и $\vec{R}$. Това е векторна величина, характеризираща действието на силата при въртеливо движение, наречена момент на силата (или въртящ момент) $\vec{M}$:

$\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F}$

(3) $M = RF \sin\beta$.

Мерната единица за момент на сила е [**N.m**]. Моментът на силата е еквивалентната величина на силата при въртеливите движения. Виждаме, че резултатът от действието на силата зависи не само от големината на силата, а и от посоката спрямо оста на въртене. Ако направлението на силата минава през оста на въртене, виждаме, че ъгъл $\boldsymbol{\beta}$ ще бъде **0** или $\boldsymbol{\pi}$. И в двата случая **sinβ=0** и моментът на силата също е равен на **0**. Затова такава сила, колкото и да е голяма, не може да предизвика въртене около тази ос. Ако направлението на силата сключва произволен ъгъл с оста на въртене, можем да я разложим на две компоненти, като използваме принципа на суперпозицията (4 въпрос) – едната е по направление на оста на въртене, а другата е перпендикулярна на оста. От казаното по-горе е ясно, че въртящ момент ще създава само тази компонента на силата, която е перпендикулярна на оста на въртене т.е. само тя ще извършва работа – затова пресмятахме работата в случая, в който силата е перпендикулярна на оста.

Моментът на силата, също както другите векторни ъглови величини, е аксиален вектор и е насочен по оста на въртене. Виждаме, че ако сменим посоката на силата $\vec{F}$ на противоположната (тогава ще се обърне и посоката на въртене), моментът на силата $\vec{M}$ също ще си смени посоката.

Вече можем да изразим и работата на силата (2) чрез скаларно произведение на ъглови величини, като имаме предвид големината на момента (3) и фактът, че моментът на силата $\vec{M}$ и ъгълът на завъртане $\vec{d\varphi}$ са еднопосочни:

$$dA = Md\varphi = Md\varphi\cos 0$$

$$dA = \vec{M}.\vec{d\varphi}$$

(4) $$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \vec{M}.\vec{d\varphi} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} Md\varphi.$$

Последната формула е аналог на формулата за работа на променлива сила при постъпателни движения. Ако силата е постоянна по големина и ъгълът $\boldsymbol{\beta}$ не се променя, въртящият момент също ще бъде постоянен и от (4) ще получим:

$$A = M\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = M\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) = M\Delta\varphi.$$

При извършване на работа от външната сила върху тялото, трябва да се промени неговата кинетична енергия (7 въпрос). Тъй като то не се движи постъпателно, променя се кинетичната енергия на въртеливо движение. От тази връзка (***dA=dT***) можем да получим зависимост между момента на силата $\vec{M}$, инерчният момент $\boldsymbol{I}$ и ъгловото ускорение $\vec{\alpha}$, подобна на втория принцип на Нютон:

$$dA = dT$$

$$Md\varphi = d\left(\frac{1}{2}I\omega^2\right) = \frac{1}{2}Id\omega^2 = \frac{1}{2}I2\omega d\omega = I\omega d\omega \quad |:dt$$

$$M\frac{d\varphi}{dt} = I\omega\frac{d\omega}{dt} \qquad \left(\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \frac{d\omega}{dt} = \alpha\right)$$

$$M = I\alpha$$

Последното уравнение може да се запише във векторен вид, защото векторите $\vec{M}$ и $\vec{\alpha}$ са еднопосочни:

$$\vec{M} = I\vec{\alpha}.$$

Това уравнение е аналог на втория принцип на Нютон при постъпателните движения ($\vec{F} = m\vec{a}$) и се нарича основно динамично уравнение на въртеливите движения. Виждаме, че можем да го получим като заменим линейните величини с ъглови ($\vec{F} \to \vec{M}, m \to I, \vec{a} \to \vec{\alpha}$). И тук можем да обобщим уравнението за случая, когато действат повече сили $\vec{F_i}$ (и съответно създават повече въртящи моменти $\vec{M_i}$), тъй като моментът на силата също е векторна величина и за него също е в сила принципът на суперпозицията. Резултантният въртящ момент, който действа на тялото в този случай ще бъде:

(5) $$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n}\vec{M_i} = I\vec{\alpha}.$$

Тук $\vec{\alpha}$ е ъгловото ускорение, което получава тялото от равнодействащия момент $\overrightarrow{M}$.

След като вече знаем основните динамични уравнения на постъпателното ($\vec{F} = m\vec{a}$) и въртеливо ($\overrightarrow{M} = I\vec{\alpha}$) движение на едно тяло, можем да формулираме и условията за равновесие на тяло (т.е. да определим кога тялото ще бъде неподвижно в дадена точка). В този случай тялото не се движи постъпателно, следователно ускорението му е равно на нула и от втория принцип на Нютон (основното динамично уравнение на постъпателните движения) следва, че векторната сума от всички действащи на тялото сили трябва също да бъде нула (4 въпрос). Тъй като тялото не се върти, ъгловото му ускорение също ще бъде нула и от (5) следва, че векторната сума от моментите на всички сили спрямо всички възможни оси на въртене също ще бъде нула. Така стигаме до условията за равновесие на дадено тяло:

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M_i} = 0 \quad .$$