Връзка между линейни и ъглови кинематични величини. Движение по окръжност с постоянно ускорение – основни закони

Връзка между линейни и ъглови кинематични величини

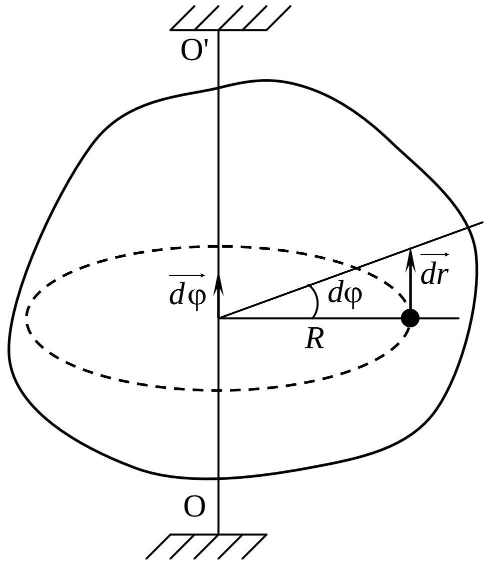
След като дефинирахме основните кинематични величини при въртеливи движения, можем да потърсим връзка между тях и дефинираните по-рано линейни величини. Видяхме, че законите за движение и скоростта при равномерно движение по окръжност имат същия вид, както и при равномерно праволинейно движение, т.е. ние можем да получим тези закони само чрез замяна на съответните линейни величини с ъглови. Следователно, при движение по окръжност връзките между линейните и ъгловите величини са съвсем прости. Затова ще използваме пак движението по окръжност при получаването им. За допълнително опростяване на математическите изводи, първо ще търсим връзките между големините на съответните вектори, а след това и между посоките им.

Нека първо да намерим връзката между големините на преместването $dr = \left|\overrightarrow{dr}\right|$ и ъгъла на завъртане $\boldsymbol{d\varphi}$ за физически малкия интервал от време $\boldsymbol{dt}$ при движение на материална точка по окръжност с радиус $\boldsymbol{R}$ (фиг. 1), като имаме предвид, че векторът $\overrightarrow{dr}$ е насочен по допирателната и следователно е перпендикулярен на радиуса $\boldsymbol{R}$:

(1) $$\frac{dr}{R} = \mathrm{tg}\,d\varphi \approx \sin d\varphi \approx d\varphi,$$
$$dr = Rd\varphi$$

тъй като за малкия интервал от време $\boldsymbol{dt}$, $\boldsymbol{d\varphi \to 0}$ а от математическия анализ знаем, че:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x}{x} = 1 \Rightarrow \sin x \approx \mathrm{tg}x \approx x.$$



фиг. 1

След като намерихме връзката между преместването $\boldsymbol{dr}$ и ъгъла на завъртане $\boldsymbol{d\varphi}$, можем да използваме определенията за линейна и ъглова скорост за да намерим връзката между тях:

(2) $$v = \frac{dr}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt} = R\omega.$$

Както виждаме, връзката отново както в (1) се дава чрез радиуса $\boldsymbol{R}$ на окръжността. Това е характерно за всички връзки между линейните и ъгловите величини при движение по окръжност. Ще го видим и при представянето на компонентите на ускорението – тангенциално и нормално – чрез ъглови величини.

Тъй като при равнопроменливите праволинейни движения пълното ускорение е равно на тангенциалното, можем да определим големината на тангенциалното ускорение:

(3) $$a_t = a = \frac{dv}{dt}.$$

Големината на $\vec{a}_t$ е равна на промяната на големината на скоростта.

Като заместим (2) в (3) ще получим връзката между големините на тангенциалното ускорение $\boldsymbol{a_t}$ и ъгловото ускорение α:

(4) $$a_t = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha.$$

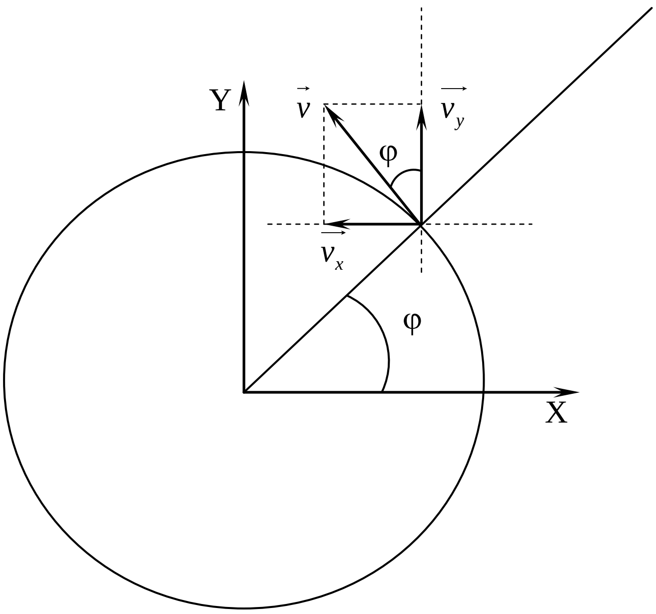
За да определим големината на нормалното ускорение ще разгледаме равномерното движение по окръжност със скорост $\vec{v}$ на една материална точка (фиг. 2). Както знаем (3 въпрос), при равномерно движение скоростта не се променя по големина – тангенциалното ускорение е нула. Тъй като движението е криволинейно, нормалното ускорение трябва да е различно от нула. Следователно пълното ускорение $\vec{a}$ е равно на нормалното $\vec{a}_n$. Това ни дава възможност да определим големината на нормалното ускорение $\boldsymbol{a_n}$, като определим големината на пълното ускорение $\boldsymbol{a}$.

Големината на пълното ускорение на материалната точка можем да определим като намерим компонентите му по осите **X** и **Y** и използваме формулата (3 въпрос):

(5) $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.

За да намерим компонентите на ускорението ни трябват компонентите на скоростта $\boldsymbol{v_x}$ и $\boldsymbol{v_y}$, тъй като

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$
$$a_y = \frac{dv_y}{dt} .$$



фиг. 2

Големините на проекциите $\vec{v}_x$ и $\vec{v}_y$ са съответно

$$v_x = v \sin\varphi$$
$$v_y = v \cos\varphi .$$

Ъгълът $\boldsymbol{\varphi}$ е ъгловата координата на точката (ъгълът, на който се е завъртяла за определено време $\boldsymbol{t}$) и следователно зависи от времето $\boldsymbol{t}$. Големината на скоростта $\boldsymbol{v}$ обаче, не зависи от времето (движението е равномерно). Тогава:

$$(6)\quad \begin{aligned} a_x &= v\cos\varphi \frac{d\varphi}{dt} = v\omega\cos\varphi \\ a_y &= -v\sin\varphi \frac{d\varphi}{dt} = -v\omega\sin\varphi \end{aligned} ,$$

тъй като производната на ъгъла $\boldsymbol{\varphi}$ по времето е големината на ъгловата скорост $\boldsymbol{\omega}$. Като заместим получените стойности за $\boldsymbol{a_x}$ и $\boldsymbol{a_y}$ от (6) в (5) окончателно получаваме:

$$(7)\quad \begin{aligned} a &= \sqrt{v^2\omega^2\cos^2\varphi + v^2\omega^2\sin^2\varphi} = v\omega \\ a &= a_n = v\omega \end{aligned} .$$

Тъй като и $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{\omega}$ са константи, то и нормалното ускорение при равномерно движение по окръжност е постоянно. Формула (7) е валидна не само за равномерно движение по окръжност, а за произволно криволинейно движение, но тогава $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{\omega}$ няма да са константи – те може да се променят с времето. В такъв случай и нормалното ускорение няма да е постоянно, а ще зависи от времето – $\boldsymbol{a_n = f(t)}$.

Като използваме (2), можем да получим големината на нормалното ускорение $\boldsymbol{a_n}$ във вид, подобен на (1), (2) и (4) (чрез радиуса на окръжността):

(8) $a_n = v\omega = \dfrac{v^2}{R} = R\omega^2$.

За да определим връзките между посоките на векторите на линейните и ъгловите величини, трябва да си припомним определението за векторно произведение на два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Това е вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, перпендикулярен и на двата вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а големината му е:

$$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\beta$$
$$c = ab\sin\beta ,$$

където $\boldsymbol{\beta}$ е ъгълът, който сключват двата вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Важно свойство на векторното произведение е, че ако разменим местата на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ или сменим посоката на единия от тях, то променя посоката си на противоположната:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$
$$\vec{a} \times \vec{b} = -\overrightarrow{(-a)} \times \vec{b} ,$$

т.е. то има свойства на аксиален вектор и затова е подходящо за описание на ъгловите величини, които също са аксиални вектори.

Трябва още да въведем и един вектор свързан с радиуса на окръжността – $\vec{R}$. Големината му е равна на радиуса $\boldsymbol{R}$, а посоката му е от оста на въртене към материалната точка, която се върти. Тогава, като се има предвид, че $\overrightarrow{d\varphi} \perp \vec{R}$ (фиг. 1), (1) може да се представи като:

$$dr = Rd\varphi\sin\frac{\pi}{2}.$$
$$\overrightarrow{dr} = \overrightarrow{d\varphi}\times\vec{R}$$

Тъй като ъгловата скорост $\vec{\omega}$ е насочена по посока на $\overrightarrow{d\varphi}$ (по оста на въртене, перпендикулярно на равнината на въртене), а линейната скорост $\vec{v}$ – по посока на $\overrightarrow{dr}$ (перпендикулярно на $\vec{R}$ и $\vec{\omega}$), ъгълът между векторите $\vec{R}$ и $\vec{\omega}$ също е **π/2** и можем да представим (2) като:

(9) $$v = R\omega\sin\frac{\pi}{2}.$$
$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{R}$$

Аналогична връзка се получава за тангенциалното ускорение $\vec{a_t}$ ($\vec{a_t} \perp \vec{R}, \vec{a_t} \perp \vec{\alpha}, \vec{\alpha} \perp \vec{R}$) от (4):

$$a_t = R\alpha\sin\frac{\pi}{2}.$$
$$\vec{a_t} = \vec{\alpha}\times\vec{R}$$

За нормалното ускорение $\overrightarrow{a_n}$ връзката е малко по-сложна – чрез двойно векторно произведение, но като се има предвид, че $\vec{v} \perp \vec{\omega}$, се получава лесно от (8) и (9):

$$a_n = v\omega\sin\frac{\pi}{2}$$
$$\overrightarrow{a_n} = \vec{\omega}\times\vec{v} = \vec{\omega}\times\left[\vec{\omega}\times\vec{R}\right].$$

Движение по окръжност с постоянно ускорение – основни закони

Видяхме, че законите за движение и скоростта при равномерно движение по окръжност са аналогични на тези за равномерно праволинейно движение (след замяна на линейните величини с ъглови). По същия начин могат да се получат и законите за движение и скоростта за равнопроменливи движения по окръжност. Те могат да се получат от графиките на законите (фиг. 3, 4 и 5 от 3 въпрос и разсъжденията към тях, като се заменят $\boldsymbol{x\to\varphi}$, $\boldsymbol{\Delta x\to\Delta\varphi}$, $\boldsymbol{v\to\omega}$, $\boldsymbol{a\to\alpha}$). Законите могат да се получат и аналитично, чрез интегриране на определенията за ъглова скорост и ъглово ускорение:

$$\alpha = \pm\frac{d\omega}{dt},\ d\omega = \pm\alpha dt,\ \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \pm\alpha\int_0^t dt,\ \omega\Big|_{\omega_0}^{\omega} = \pm\alpha\, t\Big|_0^t,\ \omega-\omega_0 = \pm\alpha t$$ (закон за скоростта) и

$$\omega = \omega_0 \pm \alpha t$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt},\ d\varphi = \omega dt,\ \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t \omega dt = \int_0^t (\omega_0 \pm \alpha t)\, dt = \omega_0\int_0^t dt \pm \alpha\int_0^t t dt$$

$$\varphi\Big|_{\varphi_0}^{\varphi} = \omega_0\, t\Big|_0^t \pm \frac{1}{2}\alpha\, t^2\Big|_0^t,\ \varphi-\varphi_0 = \Delta\varphi = \omega_0 t \pm \frac{1}{2}\alpha t^2$$ (закон за движение).

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \pm \frac{1}{2}\alpha t^2$$