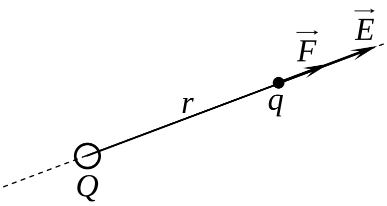
Интезитет на електростатично поле. Примери – поле на точков заряд и електричен дипол. Поток на вектора на интензитета на електростатично поле. Закон на Гаус за потока на вектора на интензитета. Приложение на закона на Гаус – безкрайна заредена равнина, две безкрайни заредени равнини

Интезитет на електростатично поле. Примери – поле на точков заряд и електричен дипол

Въвеждането на величините линейна, повърхнинна и обемна плътност на зарядите донякъде опростява определянето на силата на взаимодействие между заряди, които не са точкови (както ще се убедим от примерите по-нататък), но пак не ни дава възможност да ползваме закона на Кулон. Ако използваме принципа на суперпозицията и разделим зареденото тяло на елементарни точкови заряди, можем да определим силите, с които всеки елементарен заряд действа на пробния заряд по закона на Кулон и след това да ги сумираме векторно. Това обаче в много случаи е доста трудно математически и не е оправдано да го правим за всеки пробен заряд, който внасяме в полето. Най-добре е да се опитаме да намерим някаква характеристика на полето около заряда и да я използваме за определяне на силата, действаща на всеки заряд, поставен в това поле. Ще направим това в най-простия случай, когато полето се създава от точков заряд и ще обобщим резултата.



фиг. 1

Нека да разгледаме точков заряд Q, в чието електростатично поле сме внесли пробен заряд q (фиг. 1, на фигурата сме избрали Q>**0**). Пробният заряд трябва да бъде много по малък от Q, за да не внася съществени изменения в полето. Най-често пробният заряд се избира да е положителен. Големината на силата на взаимодействие между двата заряда (22 въпрос) ще бъде:

$$F_q = k\frac{Qq}{r^2}.$$

Ако на същото разстояние r от Q внесем заряд с големина **2**q, силата на взаимодействие ще бъде **2** пъти по голяма:

$$F_{2q} = k\frac{Q2q}{r^2} = 2F_q.$$

Ако обаче вземем отношението на силата на взаимодействие към големината на пробния заряд, виждаме, че то е еднакво и в двата случая:

$$(1)\quad \frac{F_q}{q} = \frac{F_{2q}}{2q} = k\frac{Q}{r^2} = E$$

и не зависи от пробния заряд. Следователно това отношение E е характеристика на полето около заряда Q и не зависи от това, дали на даденото място има друг заряд или не. Тъй като силата е векторна величина, а зарядът – скаларна, E също трябва да е вектор. Тъй като сме избрали зарядът q да е положителен, посоката на този вектор $\vec{E}$ съвпада с посоката на силата – ако зарядът Q>**0**, както е на фиг. 1, силата е на отблъскване (посоката на $\vec{E}$ е от заряда Q към безкрайност), а ако Q<**0** – силата е на привличане т.е. посоката на $\vec{E}$ е към заряда Q и следователно можем да запишем:

$$(2)\quad \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

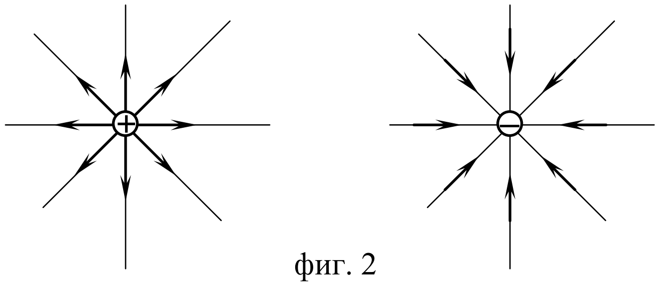
Ако зарядът q е единичен (q**=1 C**), тогава силата по големина ще е равна на E. Така дефинираната величина (2) $\vec{E}$ се нарича интензитет на електростатичното поле в дадена точка и се определя от силата, която действа на единичен положителен заряд, поставен в тази точка. От (2) може да се определи и мерната ѝ единица – **[N/C]**. Тъй като интензитетът на полето се дефинира чрез силата, той се нарича още силова характеристика на полето. Получената формула (2) е валидна за полето на произволен заряд (не само точков). Следователно като преобразуваме тази формула можем да пресмятаме силата, която действа на заряд q, поставен в поле с интензитет $\vec{E}$, независимо от това, какъв заряд създава това поле:

$$(3)\quad \vec{F} = q\vec{E}.$$

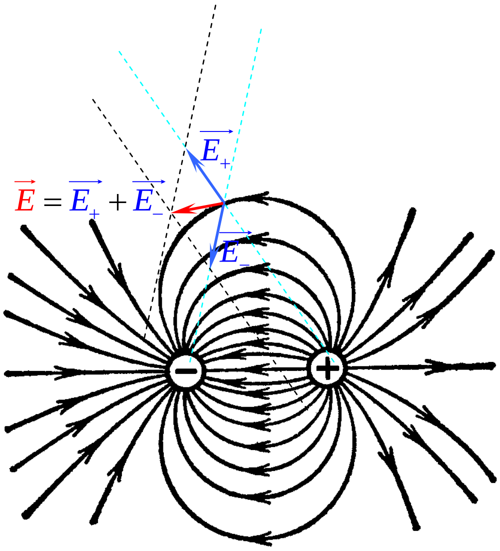
От (3) се вижда, че ако зарядът q<**0**, силата ще е противопосочна на интензитета на полето.

За онагледяване на електростатичното поле обикновено се използват силови линии на интензитета. Те се чертаят по такъв начин, че векторът на интензитета да е насочен по допирателната на силовата линия във всяка точка, а гъстотата им е пропорционална на големината на $\vec{E}$. Видяхме, че интензитета на полето на точков заряд е насочен винаги от заряда към безкрайност (при $\boldsymbol{Q}>\mathbf{0}$) или от безкрайност към заряда (ако $\boldsymbol{Q}<\mathbf{0}$).

Следователно, силовите линии на полето на точков заряд (фиг. 2) са радиални прави, започващи от заряда към безкрайност ($\boldsymbol{Q}>\mathbf{0}$) или завършващи върху заряда от безкрайност ($\boldsymbol{Q}<\mathbf{0}$). Често срещана конфигурация от заряди е т.нар. електричен дипол (фиг. 3). Това са два равни по големина и противоположни по знак заряда, разположени близо един до друг. За да получим силовите линии на полето на дипол ще използваме принципа на суперпозицията ($\vec{E}$ също е векторна величина) – във всяка точка векторната сума от двата интензитета $\vec{E}_+$ и $\vec{E}_-$ трябва да е по допирателната към силова линия (фиг. 3). По подобен начин, като се използва принципа на суперпозицията, може да се построят силовите линии на полето за произволна комбинация от точкови заряди.



фиг. 2

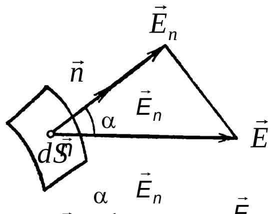


фиг. 3

Поток на вектора на интензитета на електростатично поле. Закон на Гаус за потока на вектора на интензитета

Видяхме, че за да намерим силата, действаща на заряд в електростатично поле, е достатъчно да определим интензитета $\vec{E}$ на полето. За електричен дипол (фиг. 3) пресмятането не е трудно, но за пресмятане интензитета на електростатичното поле, създадено от по-голяма система точкови електрични заряди в пространството, е необходимо да се извърши сумиране на интензитетите на електростатичните полета от всеки заряд. В някои случаи такова сумиране се оказва доста сложно, като имаме предвид, че ако имаме повече заряди, те може да не са в една равнина. Задачата се опростява с въвеждането на величината поток на вектора на интензитета (или просто поток на интензитета) $\boldsymbol{\Phi_E}$, която е пропорционална на броя на силовите линии, пресичащи перпендикулярно дадена площ $\boldsymbol{S}$. Потокът на интензитета $\boldsymbol{d\Phi_E}$ през физически малката площ $\boldsymbol{dS}$ (фиг. 4) се определя от скаларното произведение на векторите $\vec{E}$ и $\vec{dS}$:

(4) $d\Phi_E=\vec{E}.\vec{dS}=\vec{E}.\vec{n}.dS=E_n dS=EdS\cos\alpha$.



фиг. 4

Векторът $\vec{n}$ е единичен вектор, перпендикулярен на площта, а векторът на площта $\vec{dS}$ е вектор с големина равна на $\boldsymbol{dS}$ и посока – по посока на нормалата $\vec{n}$ т.е. $\vec{dS}=\vec{n}.dS$. $\boldsymbol{E_n}$ е проекцията на вектора на интензитета $\vec{E}$ върху нормалата $\vec{n}$ ($\boldsymbol{E_n=E\cos\alpha}$). От (4) можем да определим мерната единица за поток на интензитета – $\mathbf{[N.m^2/C]}$. За да получим потока на интензитета през произволна площ $\boldsymbol{S}$, трябва да интегрираме (4) по цялата площ:

(5) $\Phi_E=\int\limits_S d\Phi_E=\int\limits_S E_n dS=\int\limits_S E\cos\alpha.dS$.

Потокът на интензитета $\boldsymbol{\Phi_E}$ през затворена повърхност се пресмята лесно като се използва законът на Гаус, който гласи, че потокът на интензитета $\boldsymbol{\Phi_E}$ през произволна затворена повърхност $\boldsymbol{S}$ е равен на алгебричната сума на зарядите, заградени от тази повърхност, разделена на електричната константа $\boldsymbol{\varepsilon_0}$ (ако заградения обем не е вакуум – $\boldsymbol{\varepsilon_0\varepsilon}$):

(6) $\Phi_E=\oint\limits_S \vec{E}.\vec{dS}=\oint\limits_S E_n dS=\oint\limits_S E\cos\alpha.dS=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} q_i}{\varepsilon_0\varepsilon}=\dfrac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon}$.

Като пример ще пресметнем интензитета на полето на точков заряд $\boldsymbol{Q}$ на разстояние $\boldsymbol{r}$ от заряда. Тъй като можем да си избираме произволно повърхността, през която ще пресмятаме потока, в случая е удобно да изберем сфера с център в заряда $\boldsymbol{Q}$ и радиус $\boldsymbol{r}$. Показахме (фиг. 2), че векторът на интензитета за положителен (отрицателен) заряд е насочен по правата излизаща от (влизаща в) заряда т.е. по радиуса на избраната от нас сфера. Следователно проекцията $\boldsymbol{E_n}$ ще бъде равна на $\boldsymbol{E}$ ($\boldsymbol{-E}$) и не зависи от мястото върху сферата. Тогава, като приложим закона на Гаус (6) и определението за поток на интензитета (5), получаваме:

$\Phi_E = \dfrac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon}$ – от закона на Гаус и

$\Phi_E = \oint\limits_S E_n dS = \oint\limits_S EdS = E\oint\limits_S dS = E4\pi r^2$ – от определението за поток на интензитета.

Като приравним и десните страни на двете равенства получаваме:

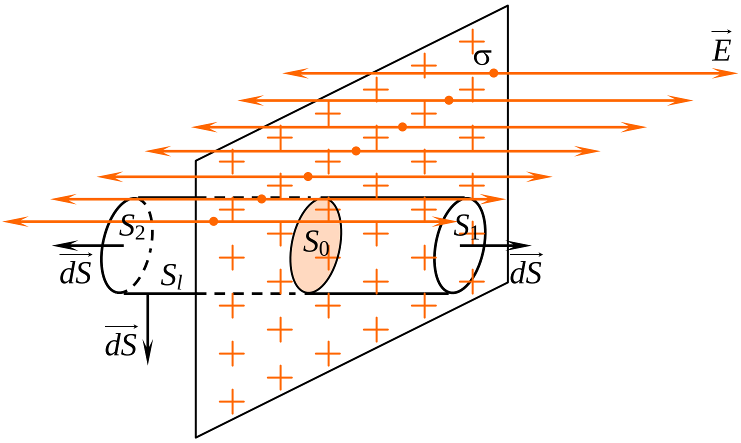
$$\frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon} = E4\pi r^2$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{Q}{r^2} = k\frac{Q}{r^2},$$

т.е. получаваме (1). За отрицателен заряд проекцията на интензитета ще бъде със знак минус, но и зарядът ще бъде със знак минус, така че големината на интензитета ще бъде същата.

Приложение на закона на Гаус – безкрайна заредена равнина, две безкрайни заредени равнини

Ще използваме закона на Гаус за определяне на интензитета на електростатичното поле в няколко случая, които са много важни от практическа гледна точка.



фиг. 1

Първо ще определим интензитета около безкрайна равнина (фиг. 1), равномерно заредена с повърхнинна плътност на зарядите **σ** ($\sigma = \dfrac{dq}{dS}$, въпрос 22). За определеност ще приемем, че зарядът ***q*** е положителен и за опростяване на записа ще приемем, че равнината е във вакуум. Следователно посоката на интензитета $\vec{E}$ ще бъде от равнината към безкрайност. Може да се покаже, че векторът на интензитета е перпендикулярен на равнината и еднакъв по големина във всяка точка около нея. Ще намерим големината му като използваме закона на Гаус. Избираме си повърхнината, през която ще пресмятаме потока на интензитета $\boldsymbol{\Phi_E}$, да бъде цилиндър, когото равнината пресича успоредно на основите (можем да си избираме произволна повърхнина). Потокът на интензитета през цилиндъра можем да пресметнем по два начина – от определението и от закона на Гаус. От определението следва:

$$\Phi_E = \oint\limits_S \vec{E}.\vec{dS} = \int\limits_{S_1} \vec{E}.\vec{dS} + \int\limits_{S_2} \vec{E}.\vec{dS} + \int\limits_{S_l} \vec{E}.\vec{dS} =$$

$$= \int\limits_{S_1} E\cos\alpha dS + \int\limits_{S_2} E\cos\alpha dS + \int\limits_{S_l} E\cos\alpha dS =$$

$$= E\int\limits_{S_1} dS + E\int\limits_{S_2} dS + 0 = ES_1 + ES_2 = 2ES_0$$

Интегралът по затворената повърхност ***S*** (цялата повърхнина на цилиндъра) може да се раздели на три части – по основите $\boldsymbol{S_1}$ и $\boldsymbol{S_2}$ и по околната повърхнина $\boldsymbol{S_l}$. Тъй като векторът $\vec{E}$ е перпендикулярен на равнината, той е еднопосочен с вектора на елементарната площ $\vec{dS}$ за $\boldsymbol{S_1}$ и $\boldsymbol{S_2}$ (**cosα=1**), но е перпендикулярен на $\vec{dS}$ за околната повърхнина $\boldsymbol{S_l}$ (**cosα=0**, третият интеграл е **0**). Тъй като големината на $\vec{E}$ не зависи от мястото, на което се намираме, можем да изнесем ***E*** пред интегралите, а площите на двете основи са равни ($\boldsymbol{S_1=S_2=S_0}$). Следователно, можем да изразим големината на интензитета:

(1) $E = \dfrac{\Phi_E}{2S_0}$,

а потока $\boldsymbol{\Phi_E}$ ще определим от закона на Гаус:

$$(2)\ \Phi_E = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S_0}{\varepsilon_0},$$

тъй като равнината е заредена равномерно и тогава $q = \sigma S_0$ е зарядът, който обхваща цилиндричната повърхност. Като заместим (2) в (1) окончателно получаваме:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Виждаме, че големината на интензитета наистина не зависи от мястото около равнината, на което се намираме, а само от повърхнинната плътност на зарядите, с които е заредена равнината. Ако около равнината имаме среда с относителна диелектрична проницаемост **ε**, интензитета ще бъде:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 \varepsilon}.$$

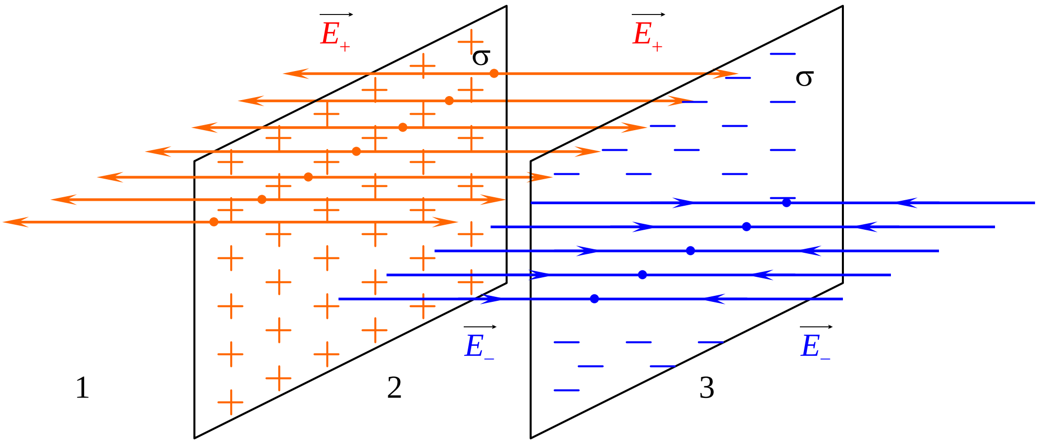
Полето около равнината е еднородно и посоката на интензитета е от нея към безкрайност. Ако равнината е заредена с отрицателен заряд, посоката на вектора на интензитета ще бъде в обратна посока – от безкрайност към равнината, със същата големина, ако повърхнинната плътност **σ** е със същата стойност.

По-интересен в практическо отношение е случаят, когато имаме две равнини, заредени с еднаква повърхнинна плътност **σ** но с противоположни знаци (фиг. 2). Това е принципното устройство на плоския кондензатор. За да получим големината на интензитета на полето в областите **1**, **2** и **3** ще използваме принципа на суперпозицията:

$$E_1 = E_3 = 0$$

$$E_2 = E_+ + E_- = 2\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0},$$

тъй като големините на интензитетите на двете полета са равни, в областите **1** и **3** интензитетите на полетата на двете равнини са с противоположни посоки и векторната им сума е **0**, а в област **2** са еднопосочни и големините се събират. Следователно електростатично поле има само между двете равнини и неговата големина е два пъти по-голяма, отколкото около една равнина. Посоката на полето между равнините е от положително към отрицателно заредената равнина. Ако между двете равнини имаме диелектрик с относителна диелектрична проницаемост **ε**, интензитетът на полето ще бъде:



фиг. 2

$$E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}.$$