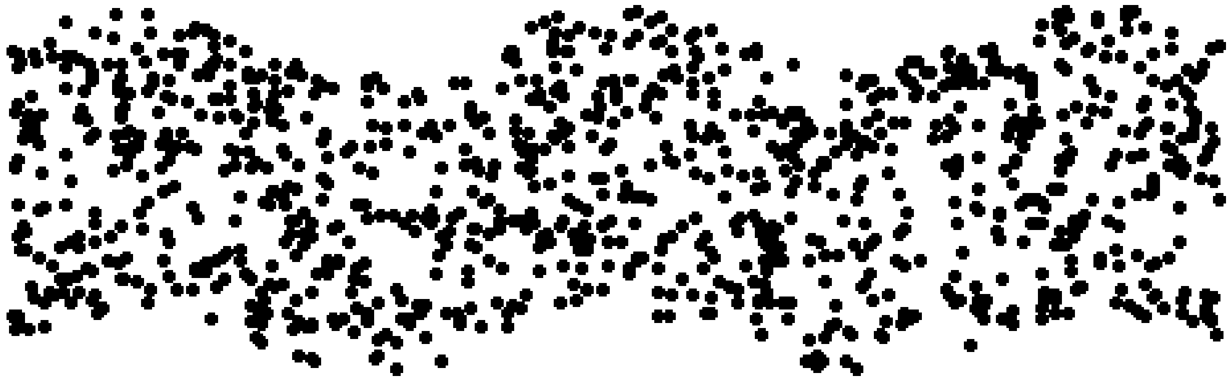
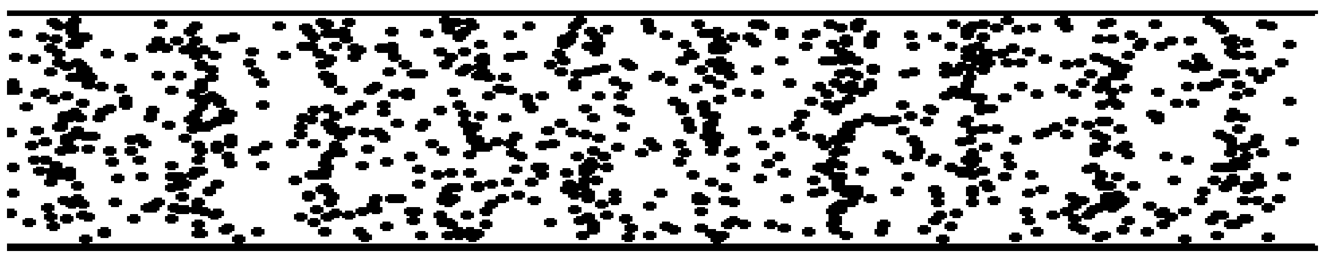
Напречна вълна

направление на трептене

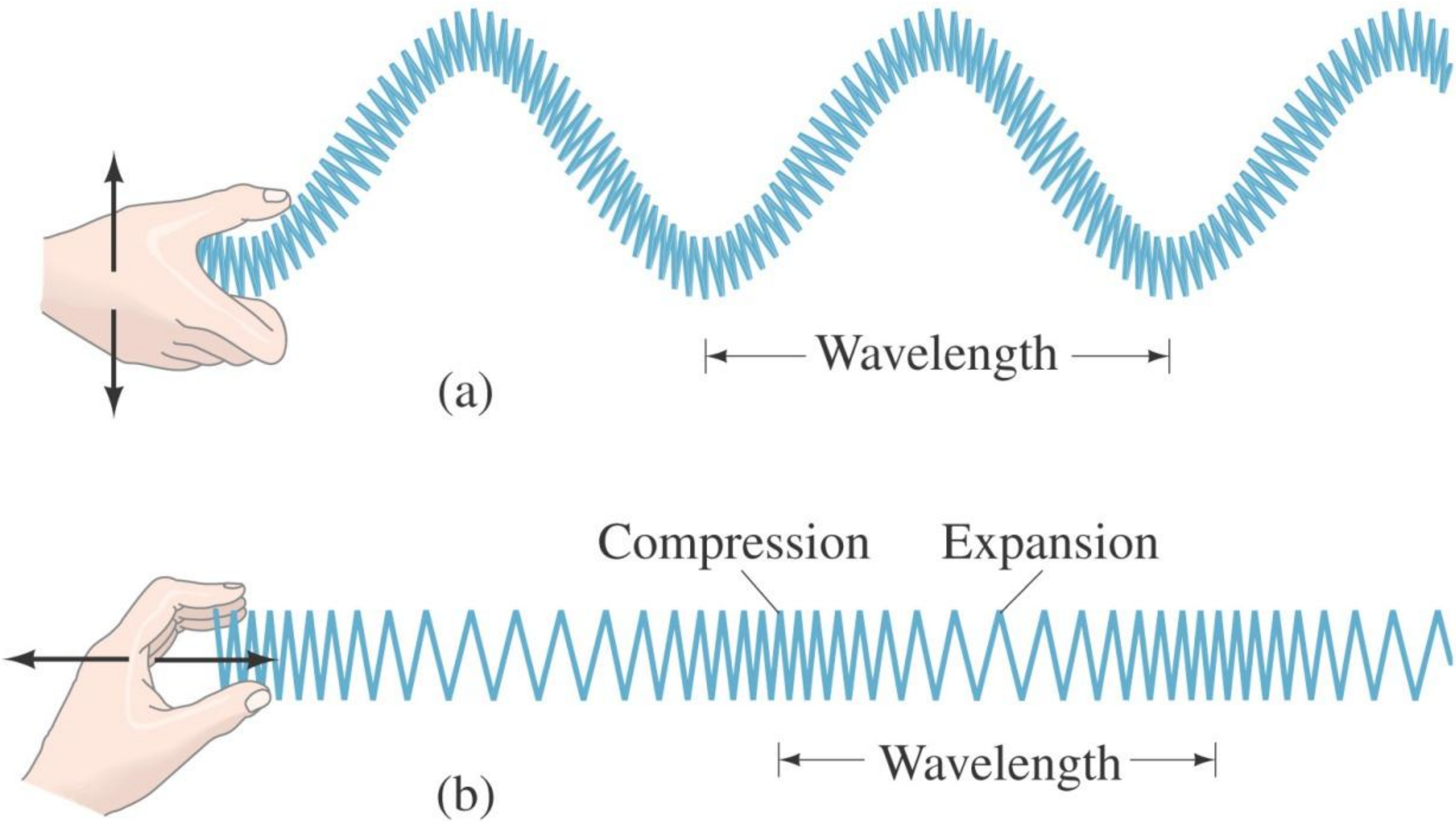


направление на разпространение

Надлъжна вълна



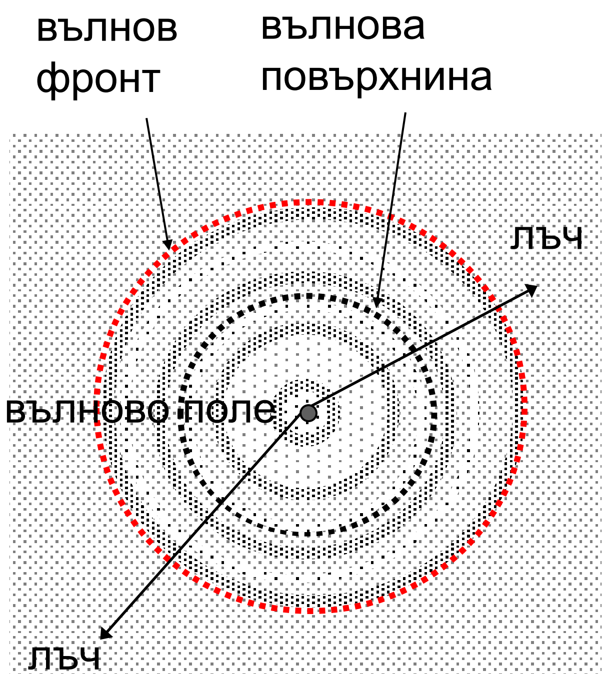
направлението на трептене съвпада с направлението на разпространение



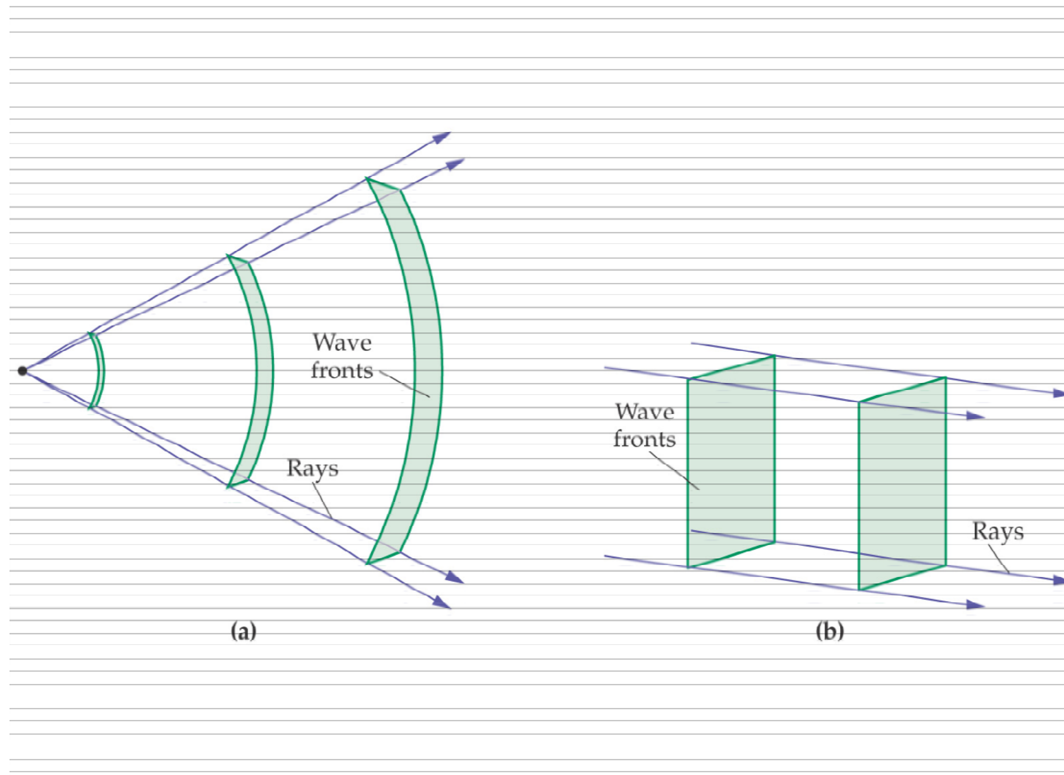
Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.

Характеристики на вълновото поле

вълнови повърхнини



Сферична вълна



Вълново уравнение

Общ случай

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{d^2 y}{dy^2} + \frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{1}{u^2} \frac{d^2 y}{dt^2}$$

Решение

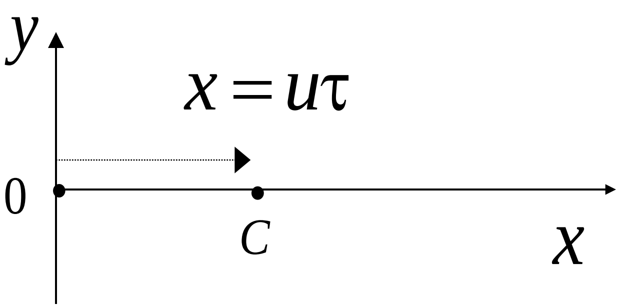
$$y = y(x, y, z, t)$$

Едномерен случай

$$\boxed{\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{u^2} \frac{d^2 y}{dt^2}}$$

Линейната, плоската и сферичната бягащи вълни са негови решения

Уравнение на бягаща вълна



$$y = y(t-\tau) = A\sin(\omega(t - x/u))$$

$$\omega = 2\pi/T \qquad \lambda = ut$$

$$\left\{ \frac{\omega x}{u} = \frac{2\pi}{T}\frac{T}{\lambda}x = \frac{2\pi}{\lambda}x = kx \right\}$$

k – вълново число

Линейна и плоска бягаща вълна

$$y = A\sin(\omega t - kx)$$

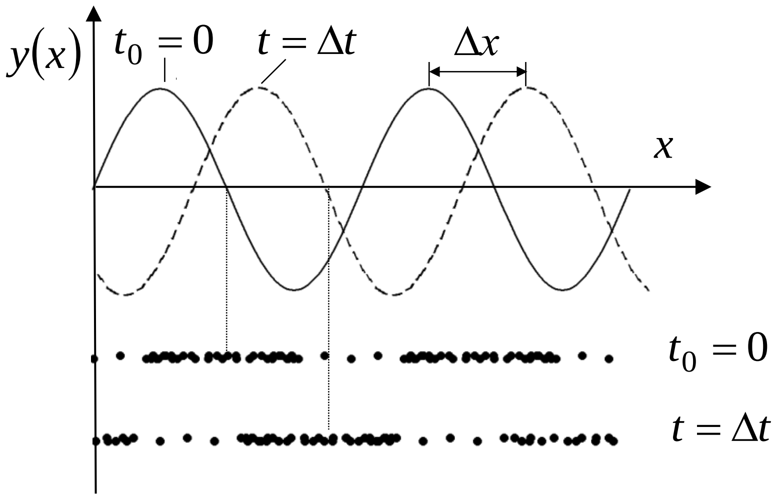
Отразена вълна

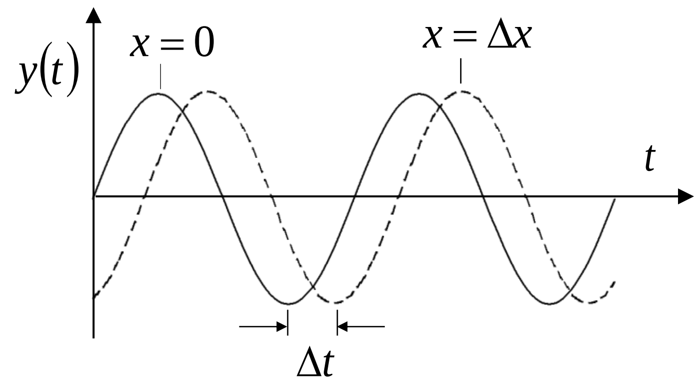
$$y = A\sin(\omega t + kx)$$

Сферична бягаща вълна

$$y = \frac{A_0}{r} sin(\omega t - kr)$$

Изследване на уравнението $y = y(x,t)$





точка на разстояние Δx трепти със закъснение по фаза

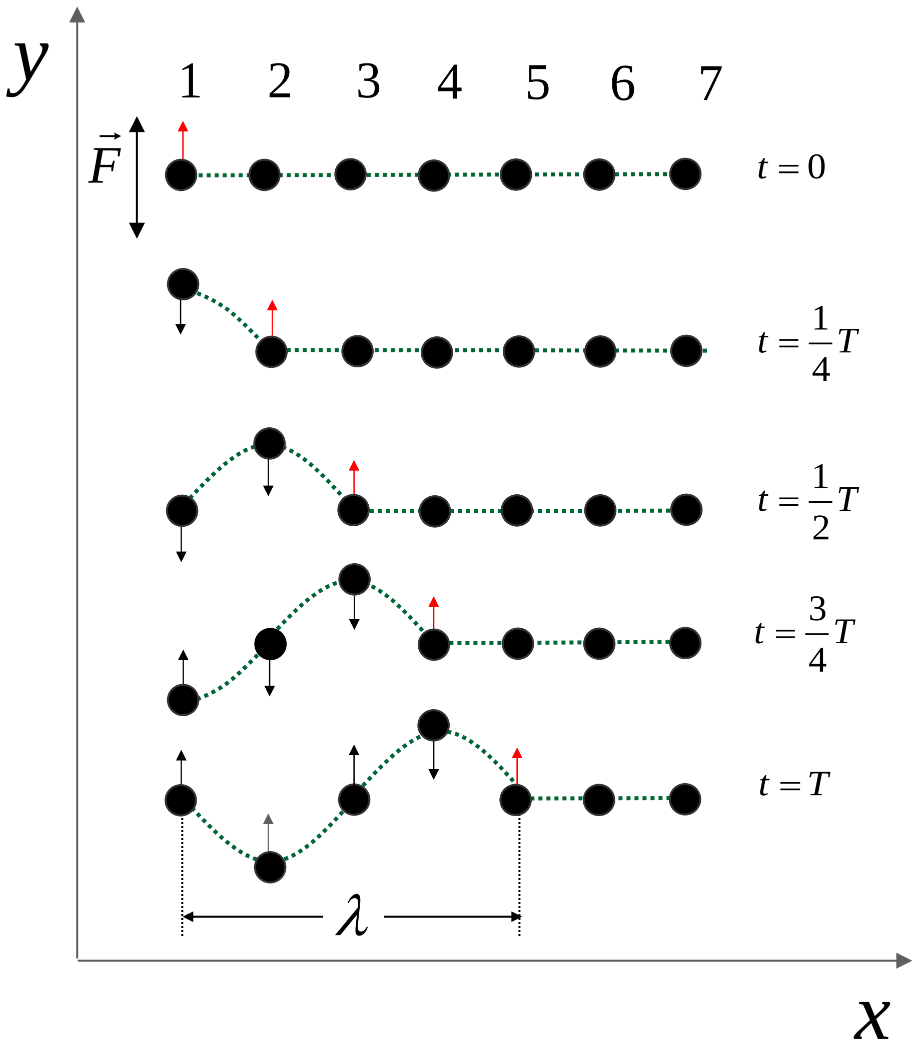
За време Δt вълната се разпространява на разстояние Δx.

$$\Delta\varphi = k\Delta x = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x$$

За един период T вълната изминава разстояние, равно на λ.

Разликата във фазите на две точки на разстояние λ е равна на **2*π*.**

Възникване на напречна вълна



Разстоянието, на което се разпространява вълната за един период се нарича ***дължина на вълната*** λ

амплитуда ***A***

кръгова честота ω

линейна честота ν

скорост на вълната

$$u = \sqrt{\frac{\text{еластичност}}{\text{инертност}}}$$

Надлъжни вълни

$$u_{\parallel} = \sqrt{\frac{E'}{\rho}}$$

E' – модул на едностранно свиване

ρ – механична плътност

Напречни вълни

$$u_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

G – модул на хлъзгане

Скорост на напречните вълни по струна

$$u = \sqrt{\frac{T_0}{\delta_0}}$$

T_0 - сила на опъване на струната

δ_0 - маса на единица дължина от струната

Енергия на вълните

$$dE_k = \frac{1}{2} dm \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \cos^2 (\omega t - kx) d\mathrm{V}$$

Кинетична енергия на обем d**V**

$$dE_p = \frac{1}{2} E \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 d\mathbf{V} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \cos^2 (\omega t - kx) d\mathbf{V}$$

Потенциална енергия на обем d**V**

пълна енергия

$$dE = \rho \omega^2 A^2 \cos^2 (\omega t - kx) d\mathbf{V}$$

плътност на енергията

$$w = \frac{dE}{d\mathrm{V}} = \rho \omega^2 A^2 \cos^2 (\omega t - kx)$$

средна плътност на енергията

$$\overline{w} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2$$

Вълната пренася енергия!

интензитет

$$I = \overline{w} u$$

Количеството енергия, пренесено през единица площ за единица време.

вълново съпротивление ***R* = ρ*u*** ***на средата***

Пример

В еднородна еластична среда с плътност ρ се разпространява плоска надлъжна вълна описваща се с уравнението:

$$u(x,t) = A\cos\left(\omega t - kx\right)$$

Определете обемната плътност на енергията и интензитета на ХВ.

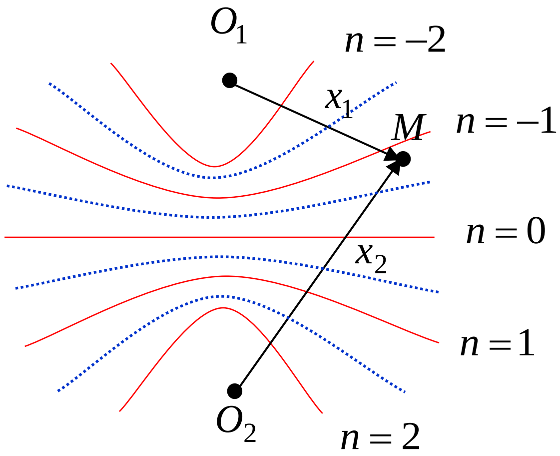
Решение:

$$w = \rho\omega^2 A^2 \sin^2\left(\omega t - kx\right)$$

$$I = \overline{w}u = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 u$$

Интерференция на механични вълни

$$y_1 = A_1 \cos(\omega t - kx_1) \qquad y_2 = A_2 \cos(\omega t - kx_2)$$



$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$$

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -k\Delta x \qquad \Delta x = x_2 - x_1$$

$\Delta\varphi = \pm 2n\pi; \quad n = 0,1,2,\ldots$ - порядък на максимума

$\Delta x = \pm n\lambda$

трептенията са ***синфазни***

$A = A_1 + A_2$

$\Delta\varphi = \pm(2n+1)\pi; \quad n = 0,1,2,\ldots$

$\Delta x = \pm(2n+1)\lambda / 2$

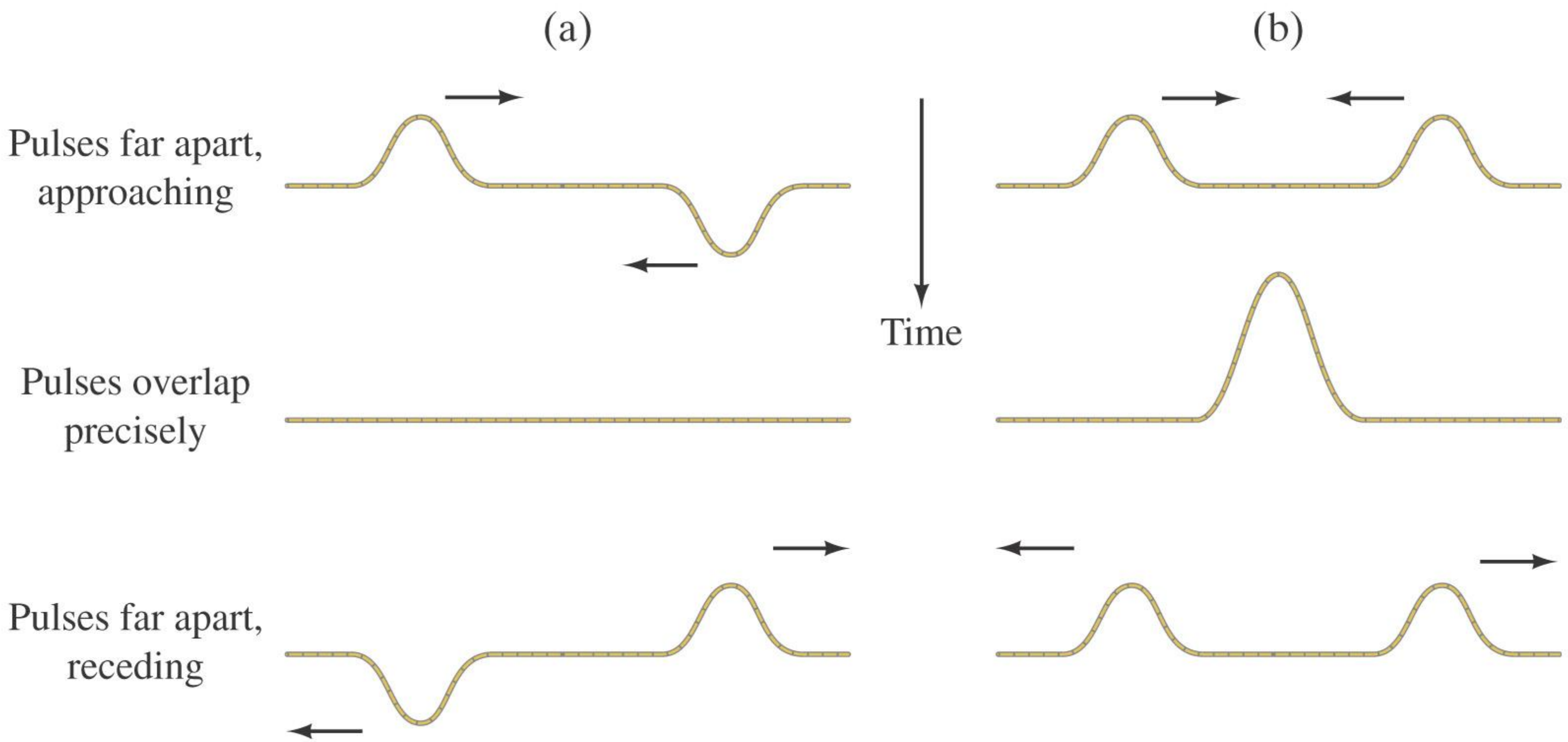
$A = |A_1 - A_2|$

трептенията са в ***противофаза***

$$|A_2 - A_1| < A < |A_2 + A_1|$$

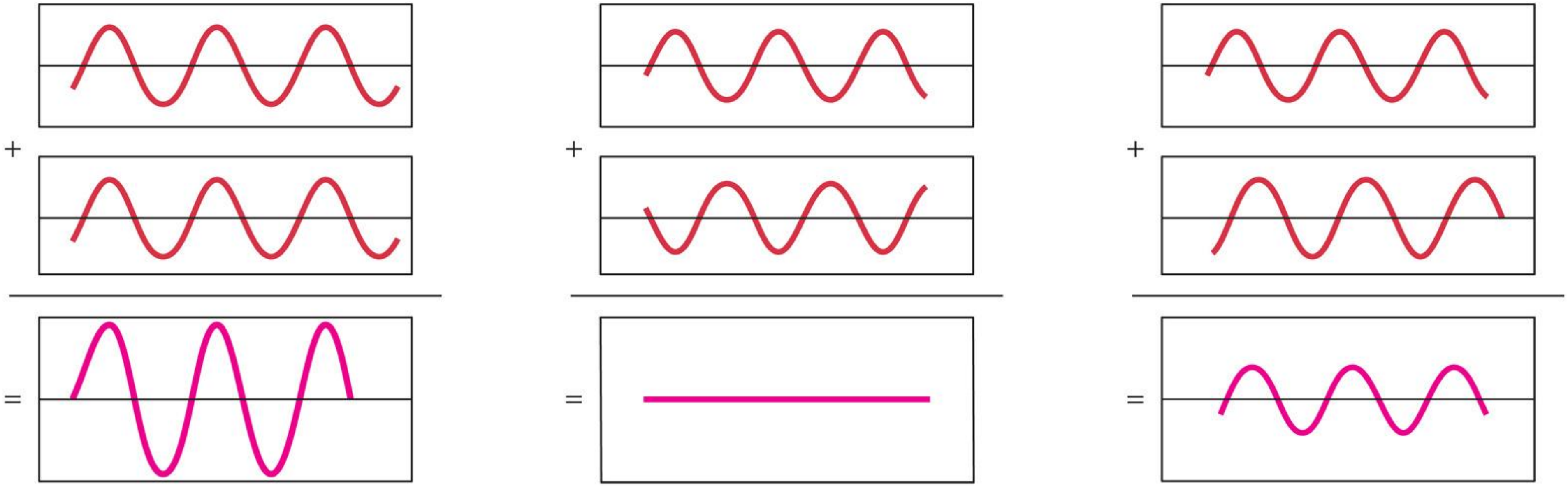
Интерференция на механични вълни

(a) Деструктивна интерференция (b) конструктивна интерференция



Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.

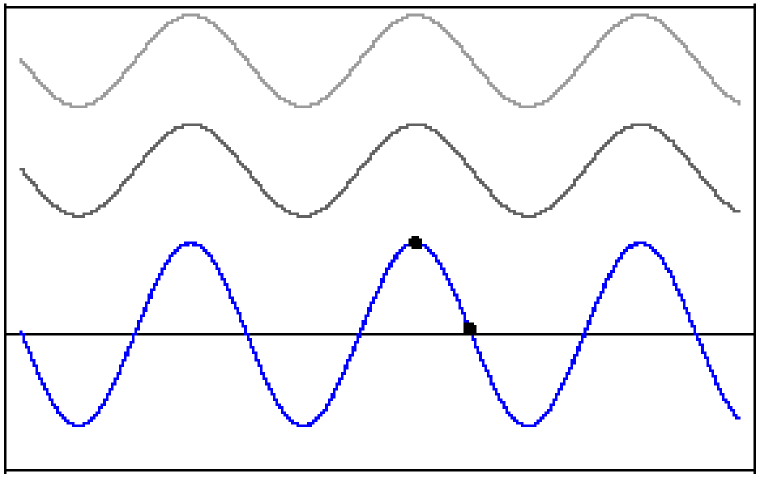
Интерференция; Принцип на суперпозицията



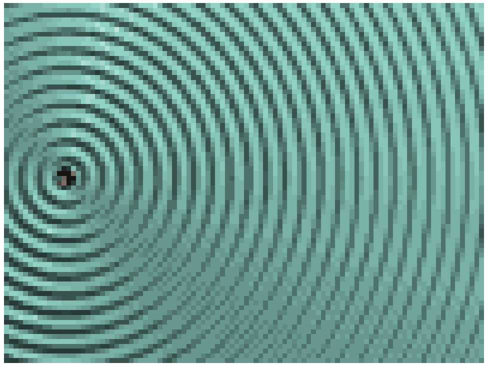
(a) (b) (c)

Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.

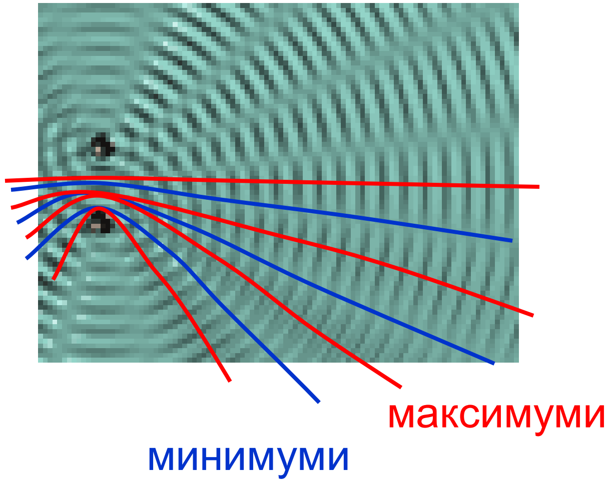
Пример



Единична бягаща вълна



Две кохерентни бягащи вълни



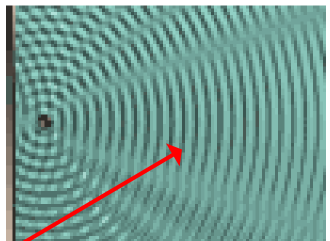
Две бягащи вълни (в светло и тъмно сиво) и резултатът от наслагването им в синьо. Двете черни точки са точки от средата, до които достигат вълните.

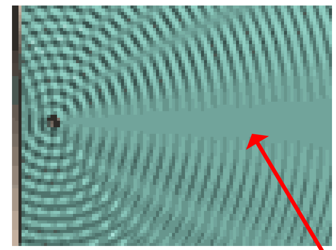
Примери:
Отражение, интерференция и дифракция на механични вълни

1. Отражение и интерференция на водна вълна от граница

ℓ - разстояние от източника до стената

$$\ell = 2\lambda$$



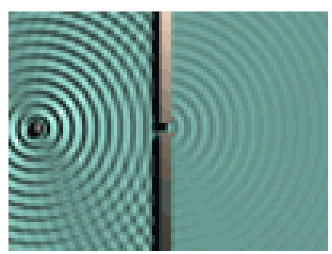


$$\ell = 2\frac{1}{4}\lambda$$

максимална амплитуда

гасене на вълновия процес

2. Дифракция от процеп



Процепът става източник на вторична, кохерентна с падащата, вълна.

Пример

Две плоски монохроматични вълни с дължини λ=0.1 м се описват с уравненията:

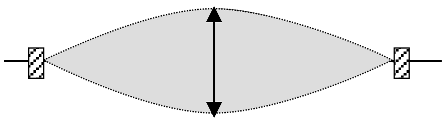
$$y_1(t,x) = A\cos\left(\omega t - kx_1\right)$$

$$y_2(t,x) = A\cos\left(\omega t - kx_2\right)$$

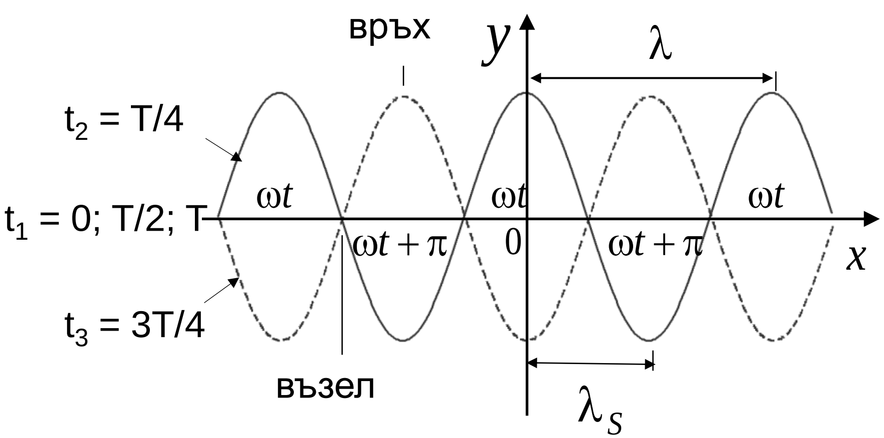
При каква стойност на разликата Δx , се получава първият максимум m при интерференцията на тези две вълни?

Стояща вълна

$$y_1 = A\sin(\omega t - kx)$$
$$y_2 = A\sin(\omega t + kx)$$



$$y = 2A\cos kx \sin \omega t \qquad A_S = 2A|\cos kx|$$



във връх: $A_s = 2A$

във възел: $A_s = 0$

от двете страни на един възел фазите се различават с π

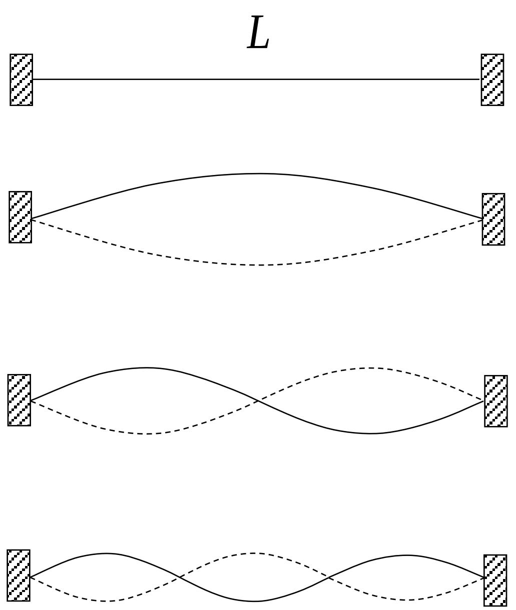
Собствени трептения на ограничени среди

а) Струна, закрепена в двата си края

Условие за възникване на стояща вълна:
По дължината на струната да се нанасят цяло число дължини на стоящата вълна

$$L = n\lambda_{Sn}; \quad n = 1,2,\ldots$$

$$\lambda_{Sn} = \lambda_n / 2$$



$n = 1;\ L = \lambda_{S1}$

$n = 2;\ L = 2\lambda_{S2}$

$n = 3;\ L = 3\lambda_{S3}$

Собствени честоти:

$$\nu_n = n\frac{u}{2L}$$

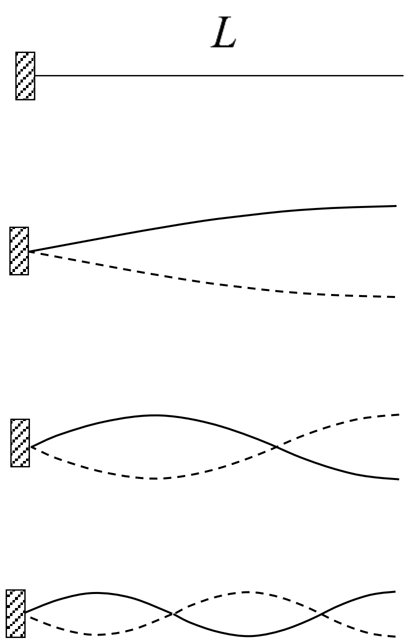
Собствени трептения на ограничени среди

б) Струна, закрепена в единия край.

Условие за възникване на стояща вълна:

По дължината на струната да се нанасят нечетно число половинки дължини на стояща вълна

$$L = \frac{(2n-1)}{2}\lambda_{Sn}; \quad n = 1,2,..$$



$n=1; L=\lambda_{S1}/2$

$n=2; L=3\lambda_{S2}/2$

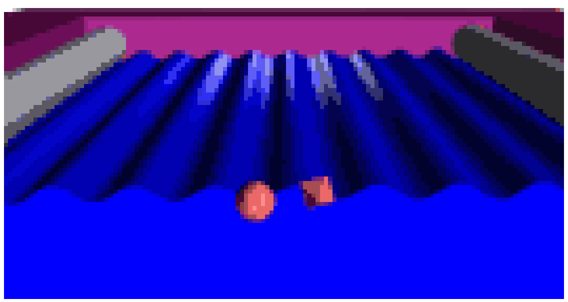
$n=3; L=5\lambda_{S3}/2$

Собствени честоти:

$$\nu_n = (2n-1)\frac{u}{4L}$$

Енергия на стоящата вълна

Частиците във възлите на стоящата вълна са в покой и затова през тях не се пренася енергия. Енергията „стои” на място и не се пренася по струната, като два пъти за един период кинетичната енергия се превръща в потенциална и обратно.



В моментите $t = 0, T/2, T,$ съответстващи на фази $0, \pi, 2\pi, \ldots$ струната е изпъната, деформация няма. Частиците от върховете на вълната минават през равновесните си положения, в които скоростта им е максимална Кинетичната енергия е максимална и е съсредоточена във върховете.

В моментите $t = 0, T/2, T, \ldots$ съответстващи на фази $\pi/2, 3\pi/2, \ldots$ скоростта на частиците е нула. Сега потенциалната енергия достига максимума си. Тя е концентрирана около възлите, където деформацията е максимална.

Фазова и групова скорости

Фазовата скорост на вълната е скоростта с която фазата на една монохроматична вълна се разпространява в пространството.

$$V_p = \frac{\omega}{k}$$

Групова скорост на вълната е скоростта с която обвивката (амплитудата) на вълновия пакет се разпространява в пространството.

$$V_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$$

Формула на Релей: $v_g = \frac{d\omega}{dk} = v_f + k\frac{dv_f}{dk} = v_f - \lambda\frac{dv_f}{d\lambda}$