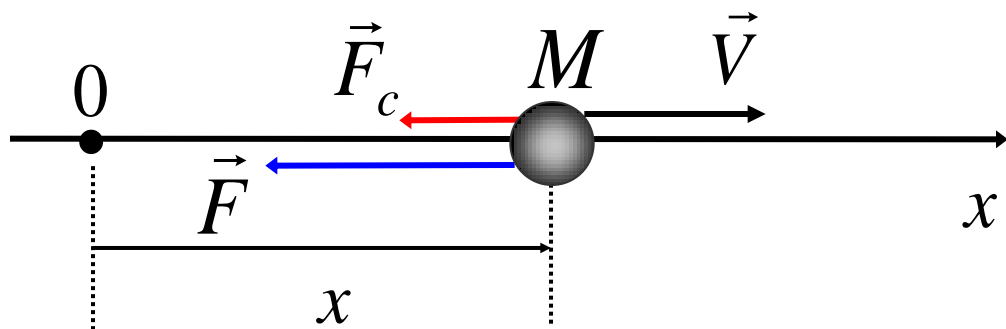


# Затихающи трептенија



$$F = -kx \quad F_c = -rV$$

$$F = F_{\text{ел}} + F_c$$

$$ma = -kx - rV$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt}$$

означенија

$$\omega_0^2 = k/m; \quad \beta = r/2m$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0)$$

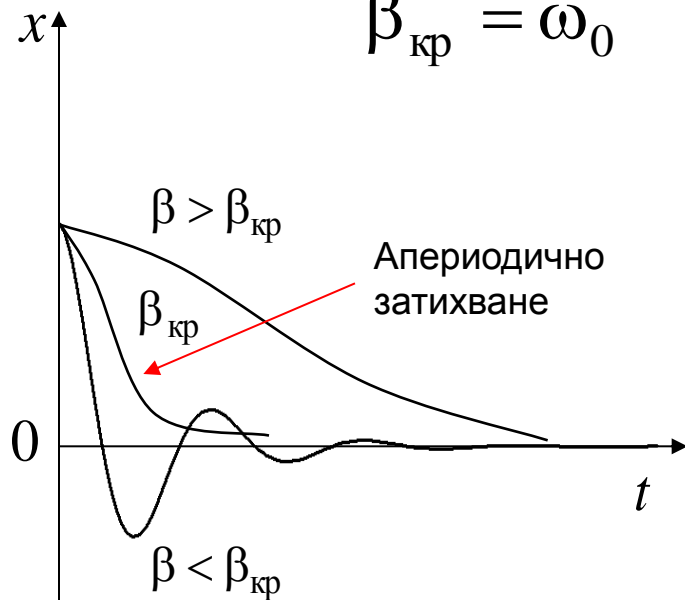
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

$$T = 2\pi / \omega = 2\pi / \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

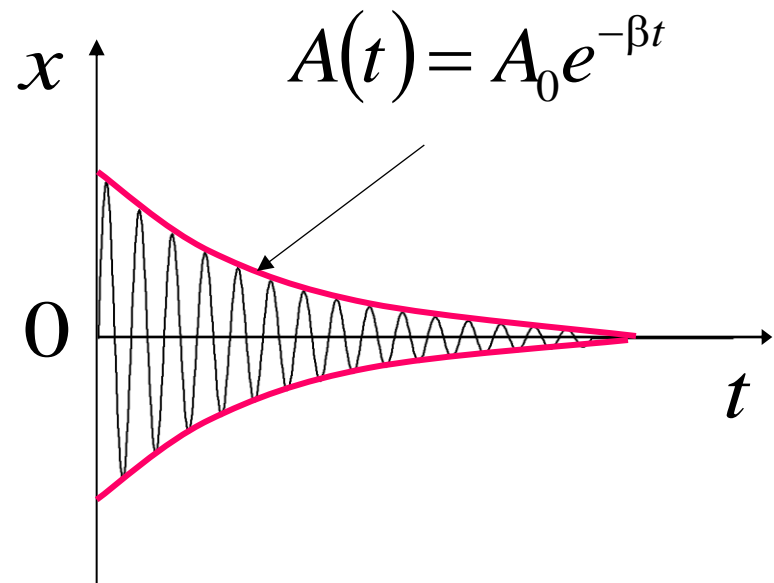
$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0)$$

честота  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

$$\beta_{\text{кр}} = \omega_0$$



Доброкачественост



Логаритмичен декремент

$$\lambda = \ln \frac{A t}{A t + T} = \beta T$$

$$Q = 2\pi \frac{E(t)}{E(t) - E(t+T)}$$

# Приложения

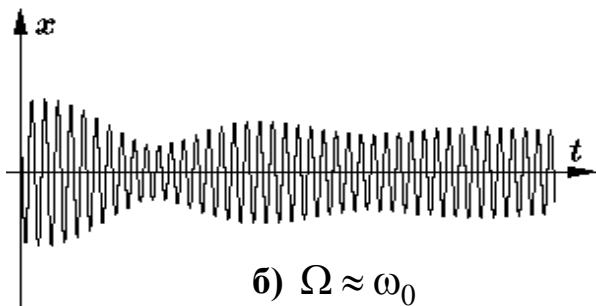
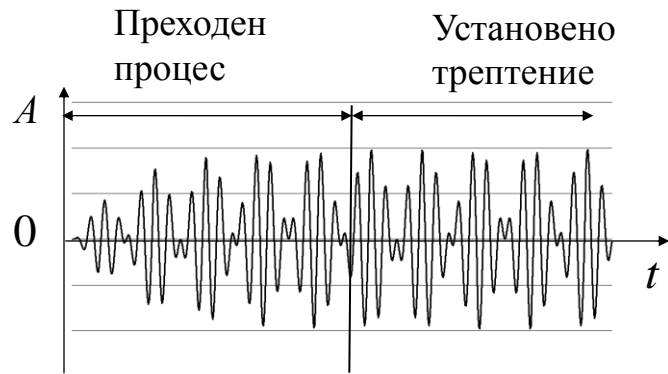
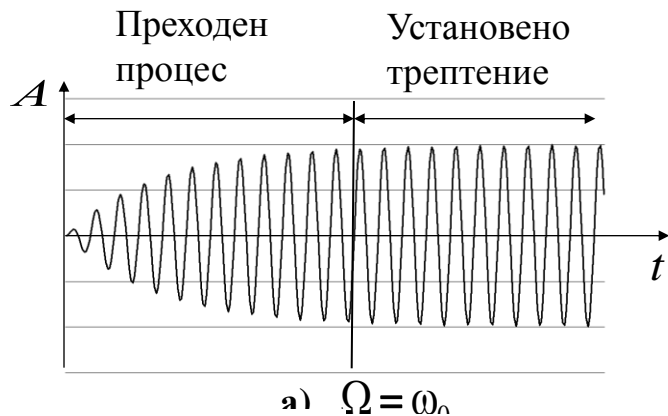
Когато  $\beta \rightarrow 0$ ,  $Q \rightarrow \infty$  няма затихване

За малки затихвания .  $Q \approx \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\omega_0}{2\beta}$

$$\beta = \frac{r}{2m}$$

- За намаляване на затихването е необходимо или да увеличим инертността, или да се намали триенето.
- За погасяване на шумове и паразитни трептения, трябва да се увеличи  $\beta$  чрез увеличаване на съпротивлението  $r$  или чрез намаляване на масата  $m$  на трептящата система. Това става със специални амортизьори (демпфери).

# Принудени трептения. Резонанс.



$$F_{np} = F_0 \sin \Omega t \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt} + F_0 \sin \Omega t$$

$$\omega_0^2 = k/m \quad \beta = r/2m \quad f_0 = F_0/m$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \sin(\Omega t)$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$x_1(t) = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0) \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

$$x_2(t) = A \sin(\Omega t + \varphi)$$

$$x(t) = x_2(t) = A \sin(\Omega t + \varphi)$$

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta \Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}$$

# Гранични случаи

А)  $\Omega \ll \omega_0$

Ниски честоти

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{2\beta\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}$$

$$\begin{aligned}\Omega &= 0 \\ F &= F_0\end{aligned}$$

$$A = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = A_{CT}$$

$$\varphi = 0$$

$$0 < \Omega \ll \omega_0$$

$$x = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \sin(\Omega t) = \frac{F}{k}$$

$$\varphi \cong 0$$

Системата следва силата, като леко изостава.

# Гранични случаи

Б)  $\Omega \gg \omega_0$

Високи честоти

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{2\beta\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}$$

$$\Omega \rightarrow \infty$$

$$A = \frac{f_0}{\Omega^2} = \frac{F_0}{m\Omega^2} \quad \varphi = \pi$$

$$\omega_0 \ll \Omega < \infty$$

$$\operatorname{tg}\varphi \rightarrow 0_-, \quad \varphi \rightarrow \pi$$

$$x = \frac{F_0}{m\Omega^2} \sin(\Omega t + \varphi)$$

$$\frac{\pi}{2} \ll \varphi < \pi$$

Трептенето е с нищожна амплитуда.

Системата е в противофаза с принуждаващата сила.

# Гранични случаи

**В) Резонанс**  $\Omega \approx \omega_0$

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{2\beta\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}$$

$$A \approx \frac{f_0}{2\beta\omega_{np}} = \frac{f_0\omega_0}{2\beta\omega_0^2} = A_{\text{статично}} \frac{\omega_0}{2\beta}$$

$$\operatorname{tg}\varphi \rightarrow \infty, \Rightarrow \varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$A_p = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}, \quad \Omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

**Системата изостава с четвърт период спрямо силата**

$$Q = \frac{A_p}{A_{\text{СТ}}} \approx \frac{\omega_0}{2\beta}$$

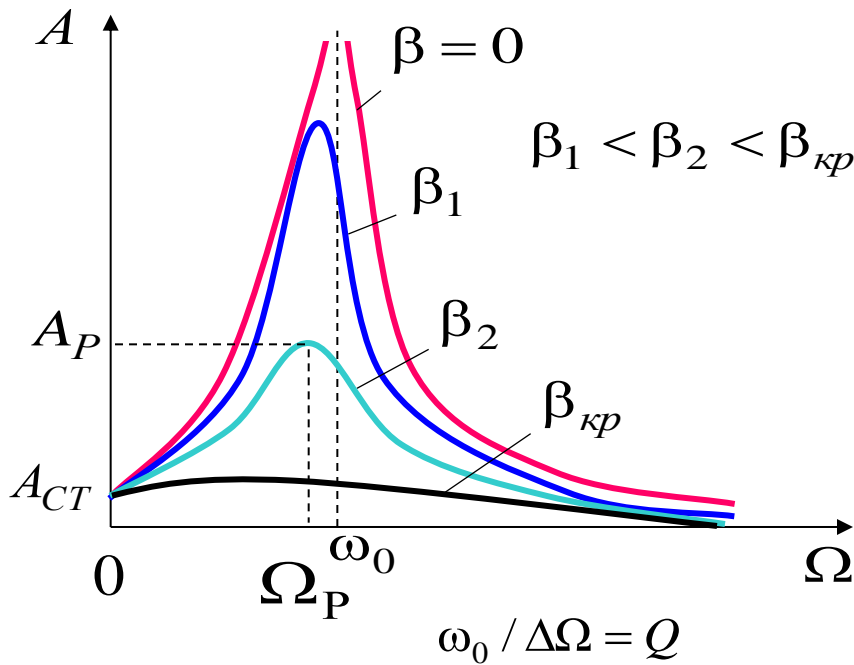
$$A = A(\omega, \Omega, k, r, m, f)$$

$$\varphi = \varphi(\omega, \Omega, k, r, m)$$

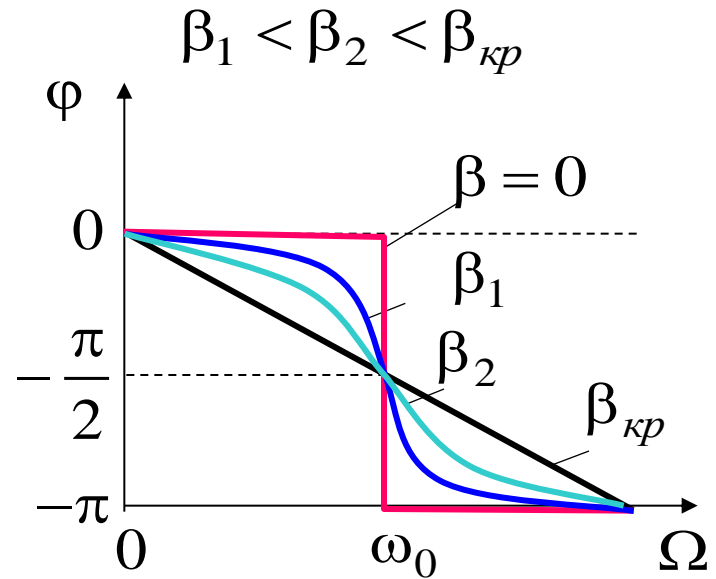
# Резонанс – амплитудна и фазова резонансни криви

$$A = A(\Omega)$$

$$\varphi = \varphi(\Omega)$$



Амплитудно-честотна резонансна крива



Фазово-честотна резонансна крива

Линейна система  $m, k, r = const$



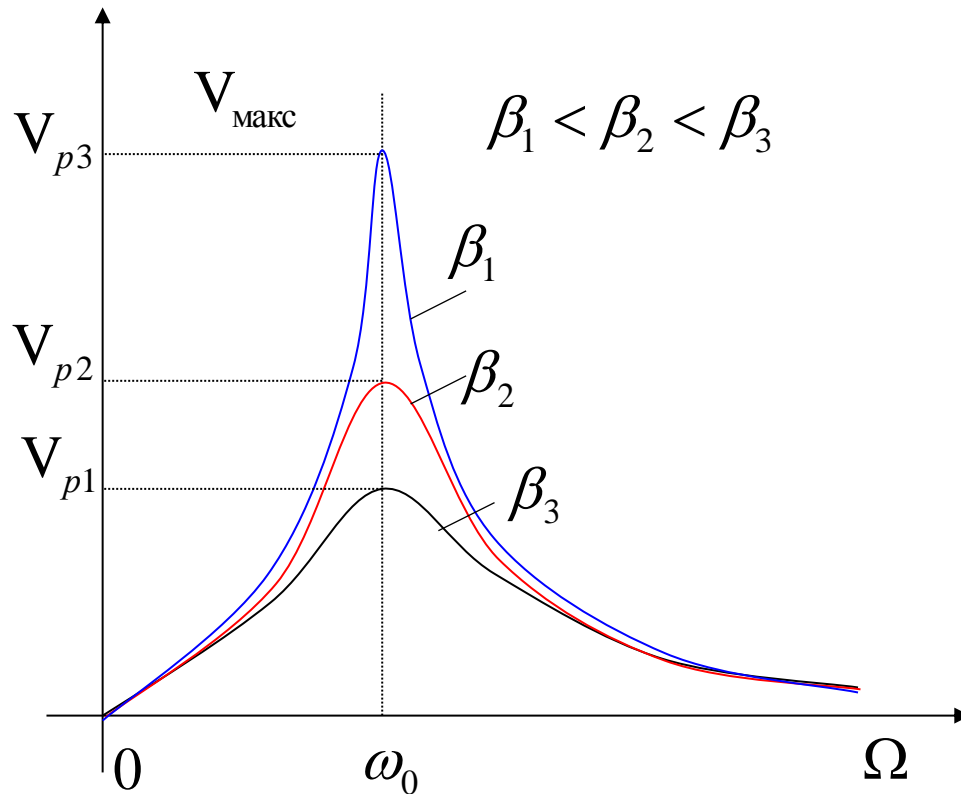
# Предаване на енергия при резонанс

$$x(t) = A \sin(\Omega t - \pi/2) = A \cos(\Omega t)$$

$$v(t) = \Omega A \cos(\Omega t)$$

$$W = \vec{F} \cdot \vec{v} \geq 0$$

$$v_{\max} = A\omega_0$$



- Работата на външните сили в този случай се изразходва за преодоляване на силите на триене.

- Резонанса се характеризира със създаване на максимално благоприятни условия за предаване на енергия от източника на външна сила към осцилатора.

- Най-неблагоприятните условия за предаване на енергия при принудени трептения са

$$\omega \ll \omega_0, \omega \gg \omega_0$$

когато фазовата разлика между силата и отместването е  $0$  или  $\pi$ .

Пълна енергия на установените принудени трептения

$$\begin{aligned} E &= E_k + E_p = mV^2 / 2 + kx^2 / 2 = \\ &= mA^2\Omega^2 \cos^2 \Omega t + \varphi_0 + kA^2 \sin^2 \Omega t + \varphi_0 / 2 = \\ &= mA^2 \Omega^2 \cos \Omega t + \varphi_0 + \omega_0^2 \sin^2 \Omega t + \varphi_0 / 2 \end{aligned}$$

# Примери



1940, Tacoma Narrows Bridge



НОВИЯТ МОСТ

