

Хармонични трептения

Трептене се нарича процес на движение или изменение на състоянието, който се повтаря през един и същ **период** от време **T** .

Трептения, които се извършват без непрекъснато добавяне на енергия в системата от вън, се наричат собствени трептения



$$f(t) = f(t + T)$$

Честотата на трептенето е равна на **$1/T$** .

Хармонично трептене

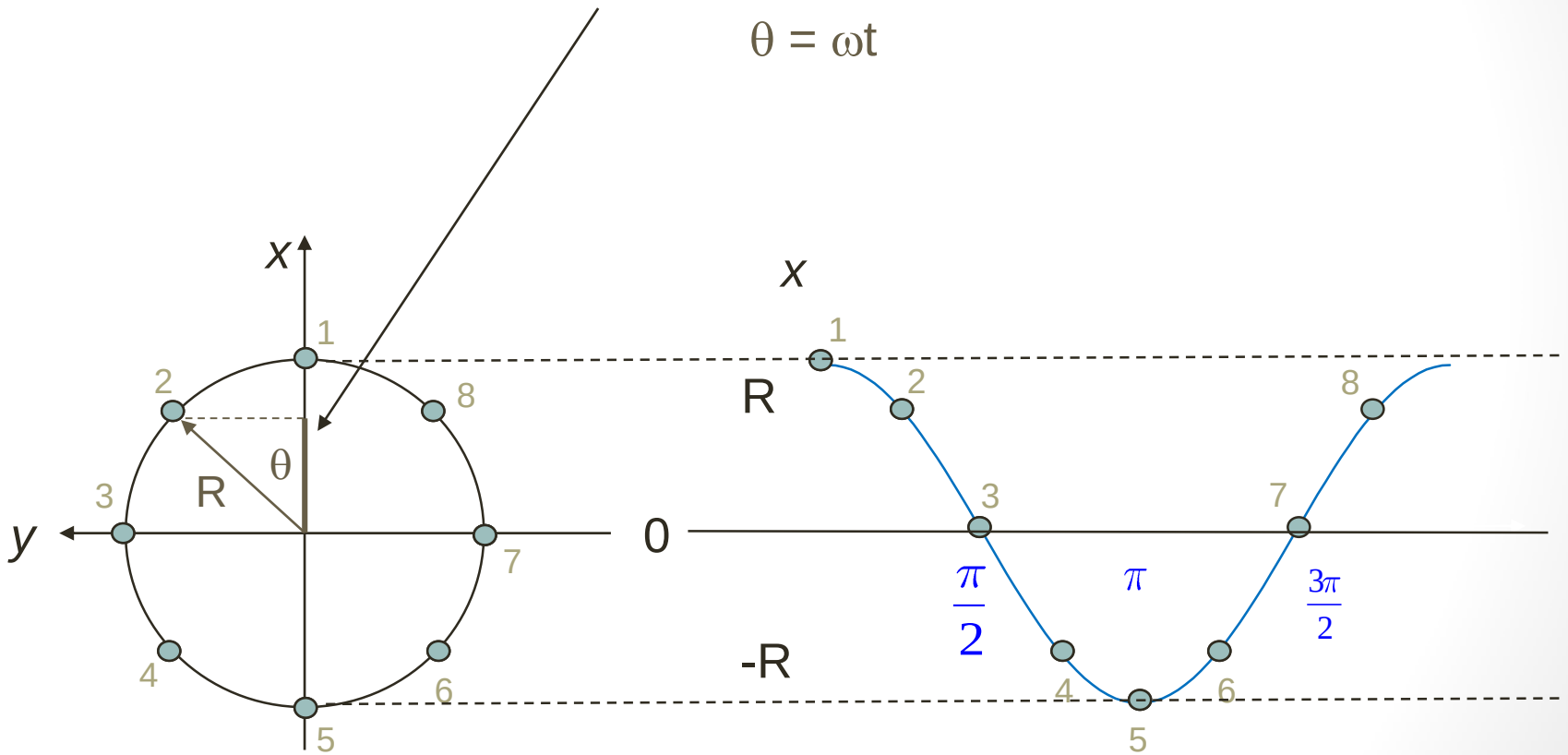
$$f_1(t) = A_1 \sin \varphi$$

$$f_2(t) = A_2 \cos \varphi$$

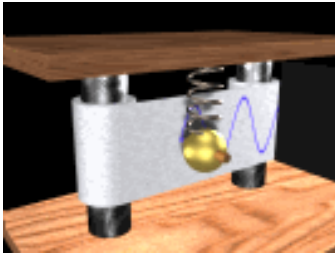
Пример: движение на материална частица по окръжност

$$x = R \sin \theta = R \sin(\omega t)$$

$$\theta = \omega t$$



Кинематика на хармонично трептене



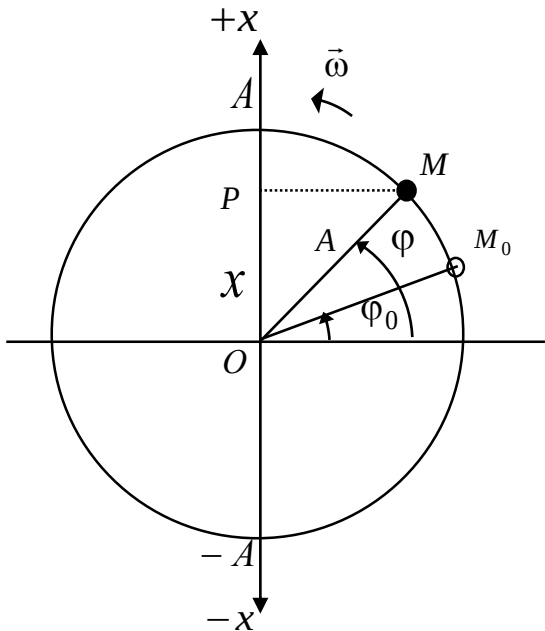
Отместването x на т. P от нулевото положение се нарича **елонгация**

То се изменя се в интервала $[-A, A]$

Максималната стойност на отклонението се нарича **амплитуда A** ,

$$x(t) = A \sin \varphi$$

$$A = |x_{\max}|$$



Фаза $\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$ [rad]

период $T = \frac{2\pi}{\omega}$ [s]

линейна честота $\nu = 1/T$ [s⁻¹]=Hz

кръгова честота $\omega = 2\pi / T$ [rad/s]

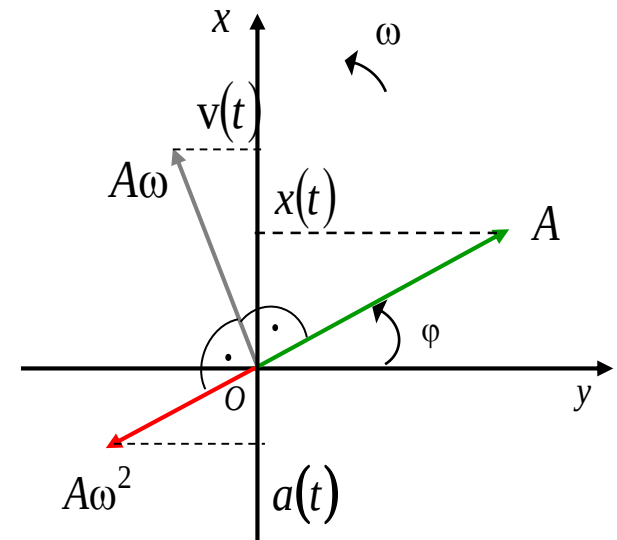
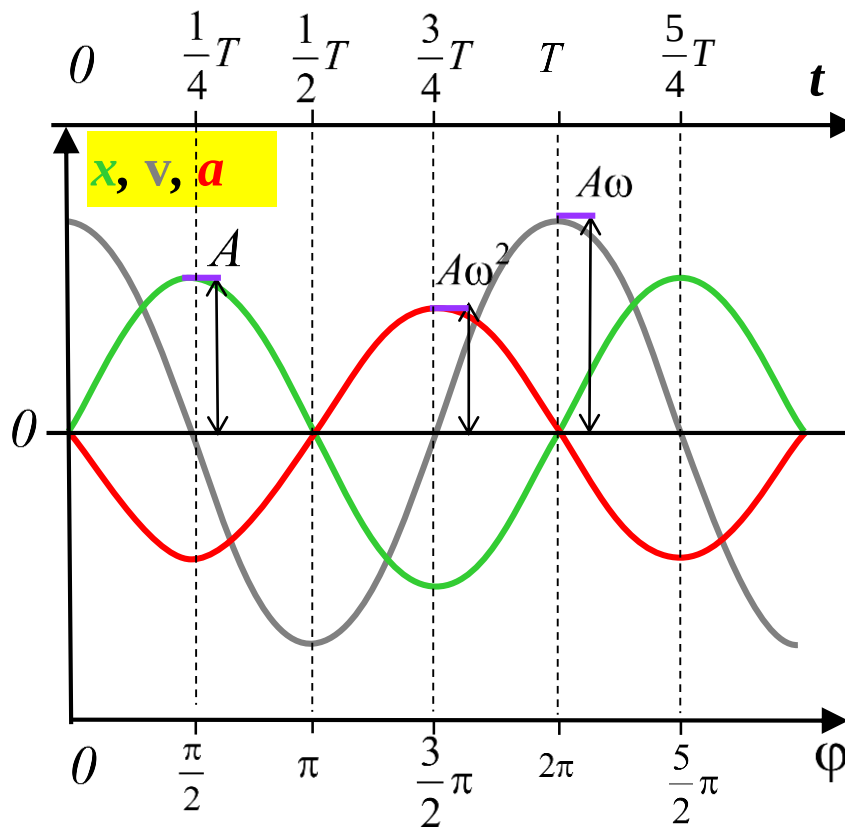
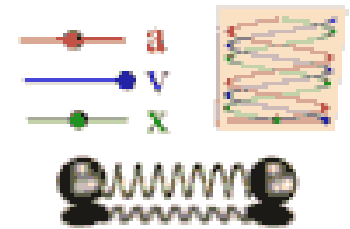
$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0) = A \sin(2\pi \nu t + \varphi_0)$$

Скорост и ускорение

$$x(t) = A \sin \varphi = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0) = A\omega \sin(\omega t + \varphi_0 + \pi/2)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) = A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0 + \pi)$$



Скорост и ускорение на хармоничното трептене

❑ Какво е отклонението, скоростта и ускорението на м.т. като функция от времето?

✓ Отклонението на хармонично трептяща м.т. се дава с:

$$x = A \cos(\omega t) \quad (\text{отклонението се дава този път с } \cos)$$

✓ Първата производна на отместването ни дава **скоростта**:

$$v = -A\omega \sin(\omega t)$$

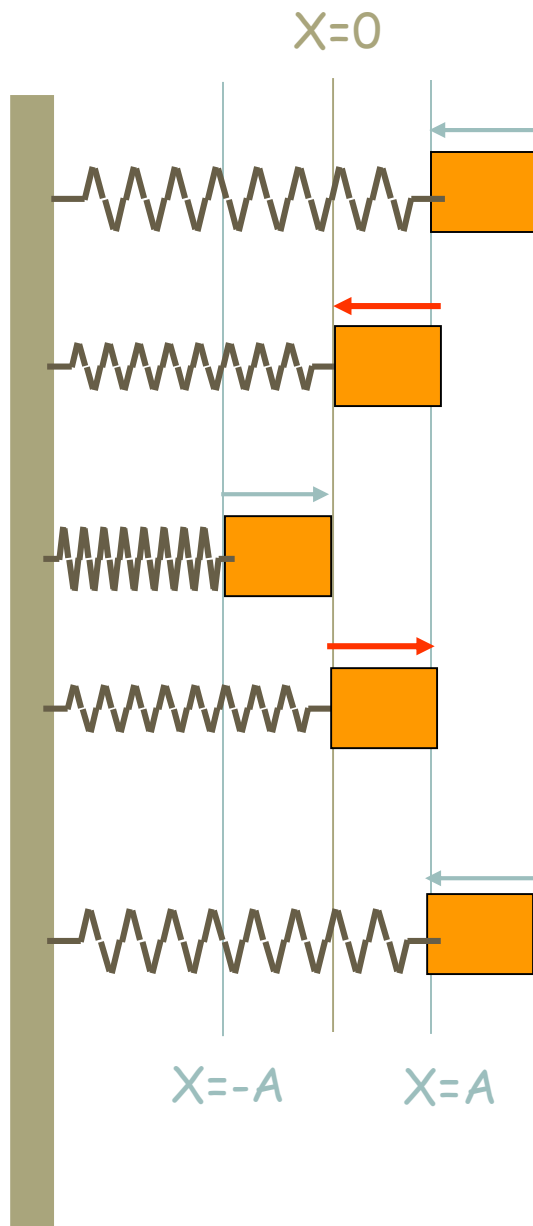
✓ Втората производна на отместването ни дава **ускорението**:

$$a = -A\omega^2 \cos(\omega t)$$

ω [rad/s] - кръговата честота

ωt - фазата на трептенето

A – амплитуда на трептенето.



$$X=A; v=0; a=-a_{\max}$$

$$X=0; v=-v_{\max}; a=0$$

$$X=-A; v=0; a=a_{\max}$$

$$X=0; v=v_{\max}; a=0$$

$$X=A; v=0; a=-a_{\max}$$

Кинематика на хармоничните трептения:

$$t=0 \text{ s, } x=A$$

$$t=0 \text{ s, } x=0 \text{ m}$$

$$x(t) = [A]\cos(\omega t)$$

$$x(t) = [A]\sin(\omega t)$$

$$v(t) = -[A\omega]\sin(\omega t) \quad \text{или}$$

$$v(t) = [A\omega]\cos(\omega t)$$

$$a(t) = -[A\omega^2]\cos(\omega t)$$

$$a(t) = -[A\omega^2]\sin(\omega t)$$

$$x_{\max} = A$$

Период = T (seconds per cycle)

$$v_{\max} = A\omega$$

Честота = $f = 1/T$ (cycles per second)

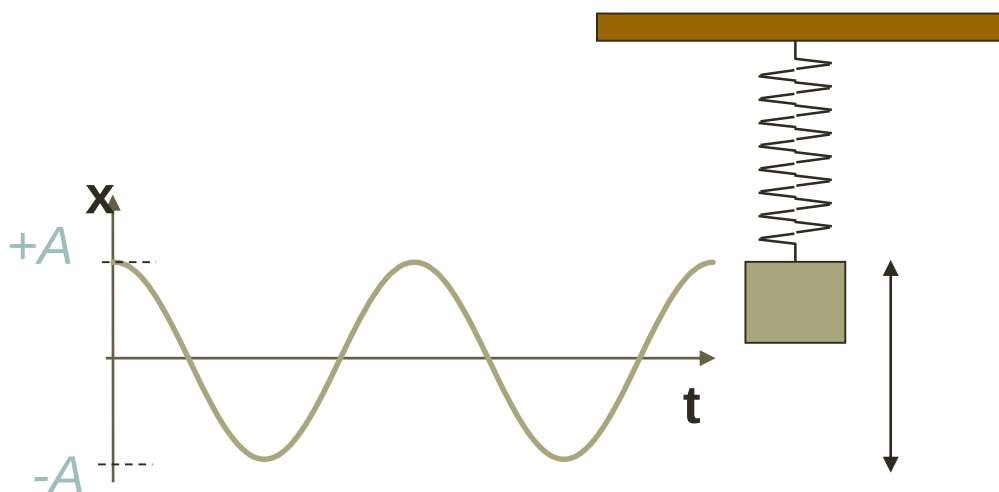
$$a_{\max} = A\omega^2$$

Кръгова честота $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$

Собствена честота ω : $\omega^2 = k/m$

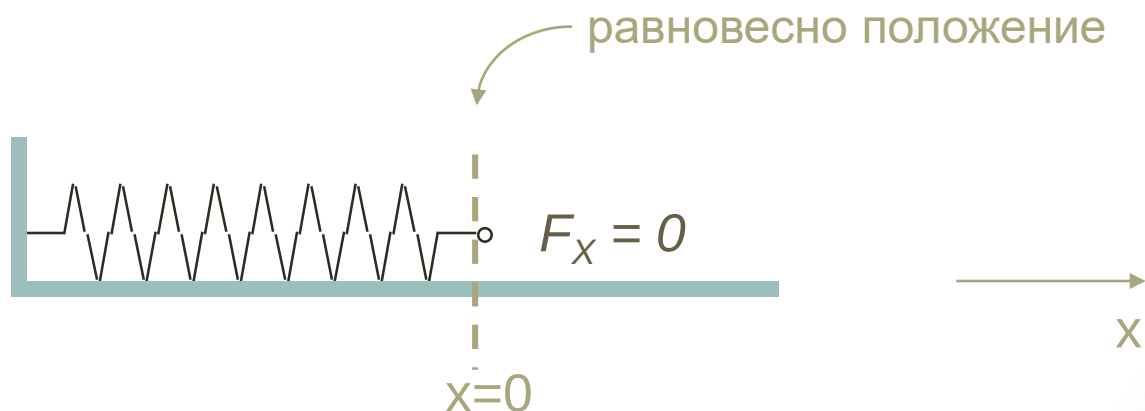
Динамика на хармоничните трептения

- Като най-прост пример за х.т. ще обсъдим свободното движение на материална точка (м.т.) закачена към идеална пружина, върху която действа сила съгласно закона на Хук.
- ✓ Материалната точка трепти нагоре надолу извършвайки хармонично движение с амплитуда A . Преместването (x) като функция от времето (t) е показано на фигурата. Подобна система се нарича пружинно махало.



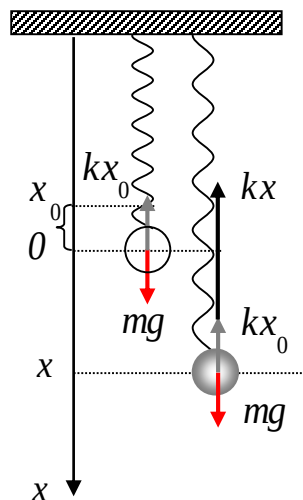
Динамика на хармоничните трептения

- **Закон на Хук:** Силата действаща на пружината е пропорционална на разстоянието с което тя е разтегната или свита от своето равновесно положение (за малки x).
- $F_x = -k x$; x е разтягането от равновесното положение а k константа на пропорционалност.



Динамика на хармоничните трептения, пружинно махало

- пружинно махало



$$F_{\text{ел}} = -kx$$

$$F = mg - kx_0 - kx = -kx$$

$$F = m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

динамично уравнение

на едномерен хармоничен осцилатор

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega_0^2 x$$

Решение:

$$x = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Собствена честота

$$\omega_0 = \sqrt{k / m}$$

Период

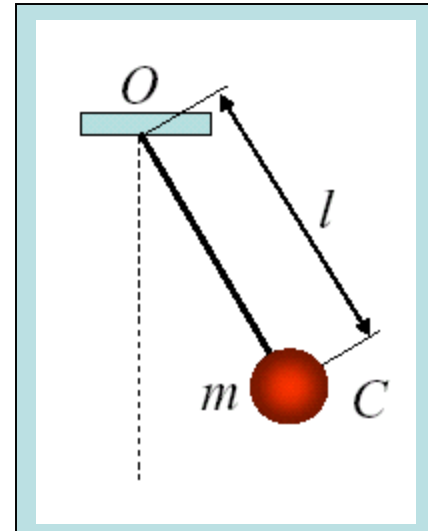
$$T = 2\pi / \omega_0 = 2\pi \sqrt{m / k}$$

Линейна честота

$$\nu = 1 / T = (1 / 2\pi) \sqrt{k / m}$$

Математично махало

- Дефиниция
 - Маса, окачена на нишка
 - Нишката – неразтеглива, пренебрежима маса
 - Без загуби в триене
 - Трептенията в една равнина



Идеализирана система

- В приближение на малки ъгли



$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Без приближение :

- Аналитично решение - сложно
- Числено решение

Математично махало

Движението е въртливо с инерчен момент: $I=ml^2$
връщаща сила: $F=mg \sin \varphi$ и въртящ момент: $M=lF$

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -M \quad \Rightarrow \quad I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + mg \sin \varphi = 0$$

$$lF \sin \varphi =$$

$$lmg \sin \varphi = M$$

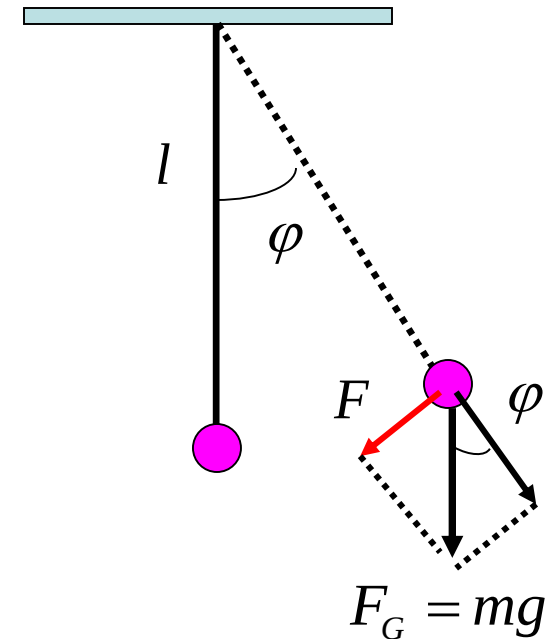
$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

при малки ъгли $\Rightarrow$ хармонично трептене:

$$\sin \varphi \cong \varphi$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_o = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \Rightarrow$$

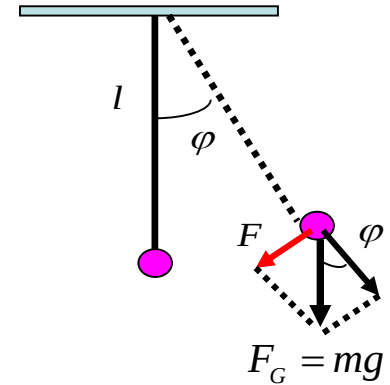
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$



Математично махало



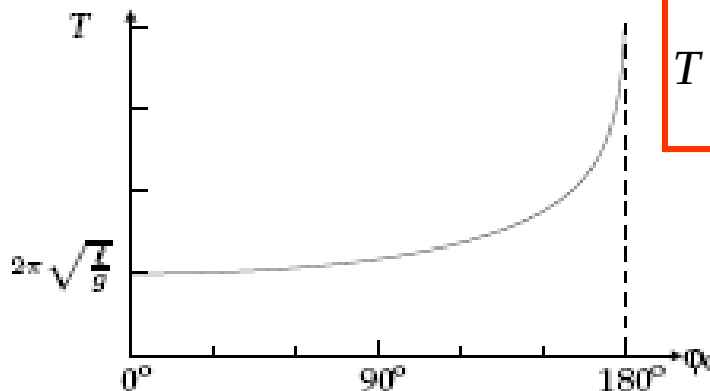
За малки ъгли $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$



Точно математично решение за всички ъгли

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{1}{g}} \cdot \left(1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \cdot \sin^4\left(\frac{\phi}{2}\right) + \dots \right)$$

- Периодът зависи от амплитудата
- Периодично движение, но не хармонично



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{16}\phi^2 \right)$$

Корекция

Добро приближение за повечето случаи в практиката

→ <1% за $\phi < 23^\circ$

Физично махало

Всяко твърдо тяло, което може да се люлее свободно (без триене) около неподвижна точка или ос.

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mgL \sin \theta$$

При малки ъгли

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{mgL}{I} \theta = 0 \qquad \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \omega_0^2 \theta = 0$$

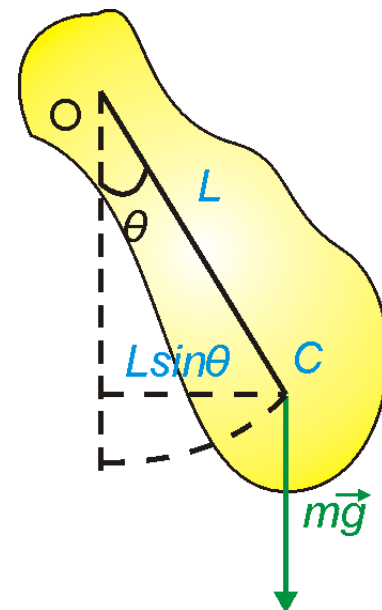
хармонични трептения

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgL}{I}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgL}} = 2\pi \sqrt{\frac{L'}{g}}$$

приведена дължина

дължината на математично махало, което има същия период



Енергия на ХТ

- ✓ Кинетична енергия на ХТ:

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2} \sin^2(\omega t - \varphi_0)$$

- ✓ Потенциална енергия на ХТ:

$$W_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \cos^2(\omega t - \varphi_0)$$

- ✓ Пълна енергия на ХТ:

$$W = W_k + W_p = \frac{kA^2}{2}$$

Пример: Тяло окачено на пружина с коефициент на еластичност 2 kN/m извършва хармонично трептене (ХТ) с амплитуда 7.1cm. Определете потенциалната, кинетичната и пълната енергия при фаза $\pi/4$ rad.

Пример: Амплитудата ХТ на материална точка (м.т) е $A=0.04$ m . Пълната енергия на трептенето е $W=5 \cdot 10^{-6}$ J. При какво отместване от равновесното положение, на м.т. действа сила $3.5 \cdot 10^{-4}$ N ?

$$x = -\frac{F}{k} \Rightarrow x = \left| -\frac{FA^2}{2W} \right| = 56 \cdot 10^{-3} \left[\frac{Nm^2}{J} = m \right]$$

Задача: Определете потенциалната енергия на деформирана пружина за която е в сила законът на Хук

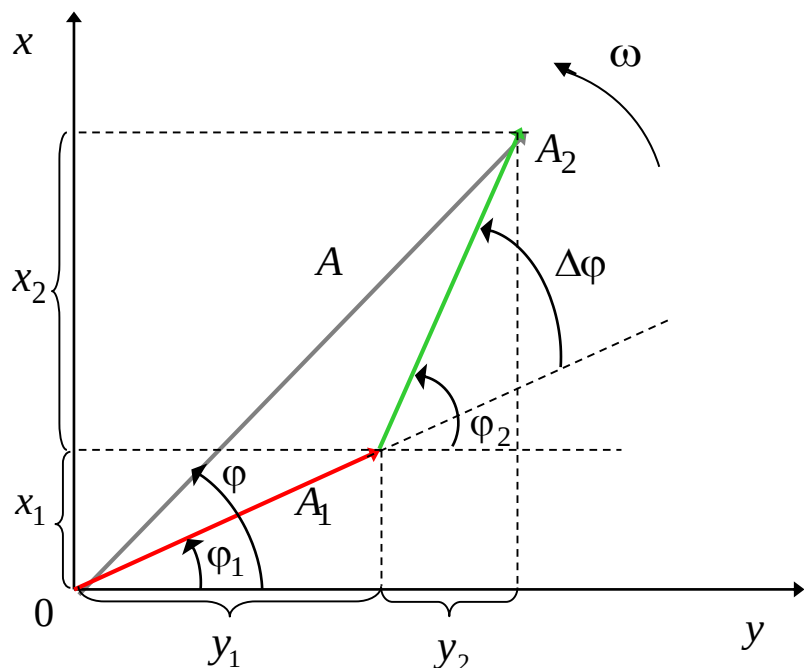
Събиране на трептения

а) кохерентни трептения в едно и също направление

Две трептения са **кохерентни** когато разликата във фазите им остава постоянна във времето

$$\Delta\varphi = \varphi_2(t) - \varphi_1(t) = (\omega_2 - \omega_1)t + (\varphi_{02} - \varphi_{01})$$

$$\Rightarrow \omega_1 = \omega_2$$



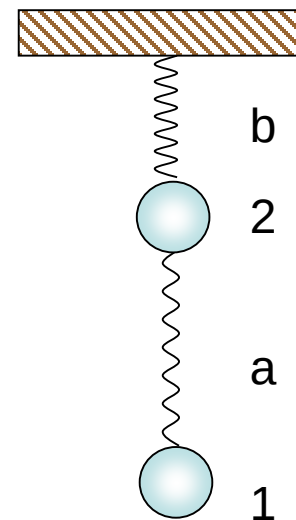
$$x_1 = A_1 \sin \varphi_1 = A \sin(\omega t + \varphi_{01})$$

$$x_2 = A_2 \sin \varphi_2 = A \sin(\omega t + \varphi_{02})$$

$$X = X_1 + X_2$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$$

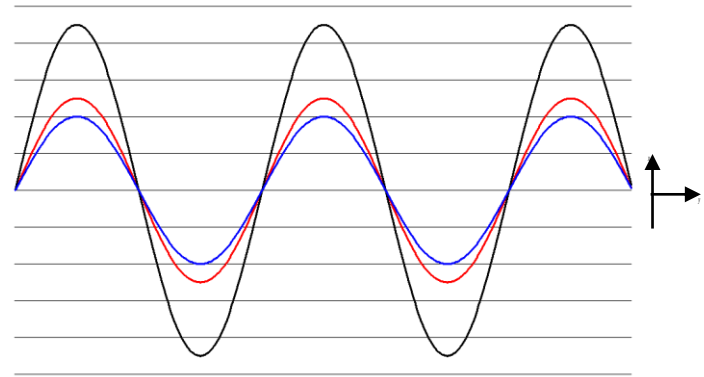


$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi}$$

$$\Delta\varphi = \pm 2n\pi; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Трептенията са **синфазни**

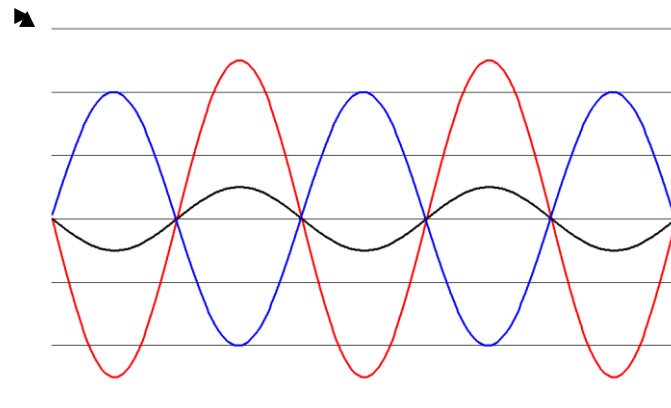
$$A = A_1 + A_2$$



$$\Delta\varphi = \pm(2n+1)\pi; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Трептенията са **в противофаза**

$$A = |A_1 - A_2|$$



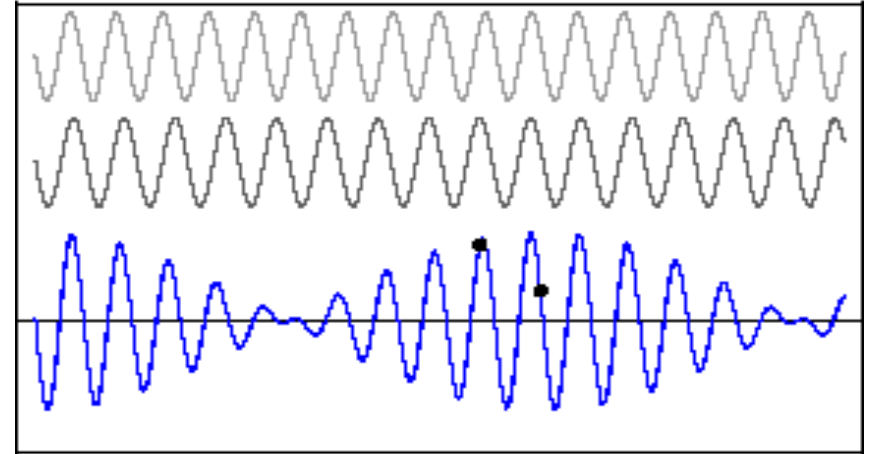
**б) събиране на некохерентни трептения в едно и също направление
с несъвпадащи но много близки честоти ($\Delta\omega \ll \omega$) - Биене**

$$A_1 = A_2 = A, \quad \varphi_{01} = \varphi_{02} = 0$$

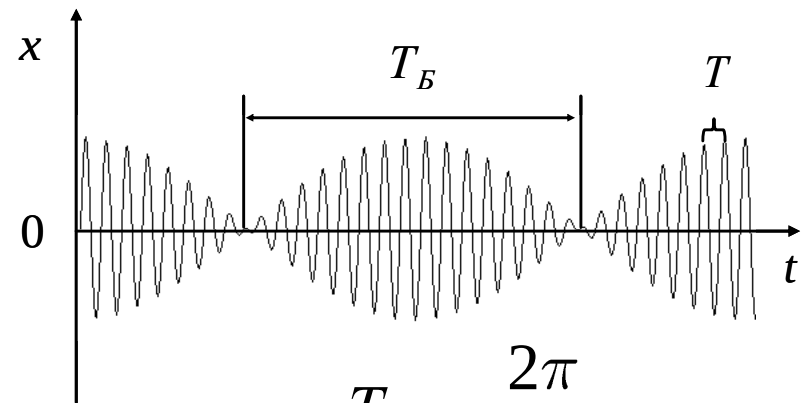
$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = \\ &= A \sin \omega t + A \sin (\omega + \Delta\omega) t = \\ &= 2A \cos \frac{\Delta\omega t}{2} \sin \omega t \end{aligned}$$

$$x = A_{\text{Б}} \sin \omega$$

$$A_{\text{Б}} = 2A \cos \frac{\Delta\omega t}{2}$$



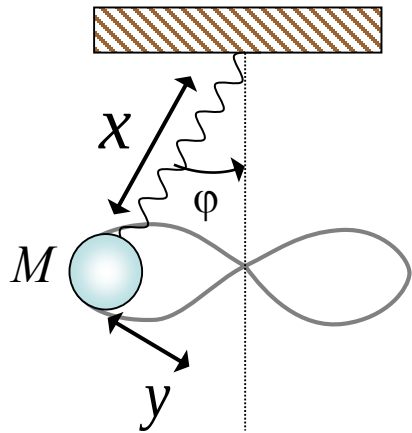
При биене звуци с близки честоти се чуват като един с променлива амплитуда



$$T_{\text{Б}} = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

Събиране на хармонични трептения

в) Трептения с еднакви честоти във взаимно перпендикулярни направления



$$\begin{cases} x = A_1 \sin(\omega t + \varphi_{01}) \\ y = A_2 \sin(\omega t + \varphi_{02}) \end{cases}$$

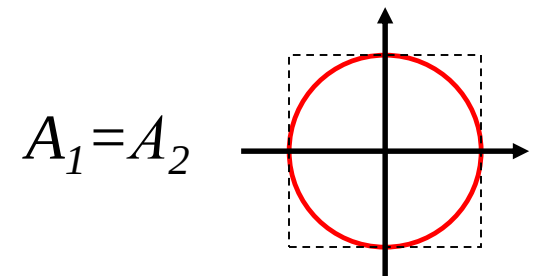
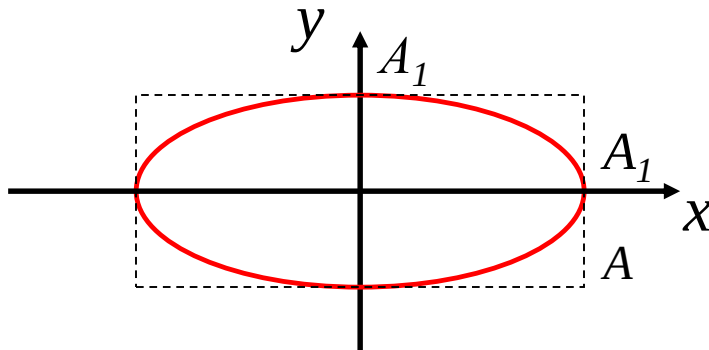
$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos \Delta\varphi = \sin^2 \Delta\varphi$$

$$T = 2\pi / \omega$$

◆ $\Delta\varphi = \pi/2$

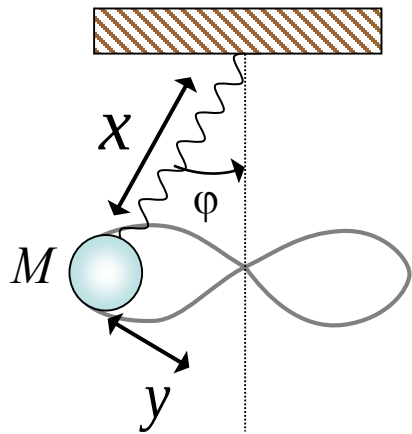
$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$$

Уравнение на елипса



Събиране на хармонични трептения

в) Трептения с **различни** честоти във взаимно перпендикулярни направления

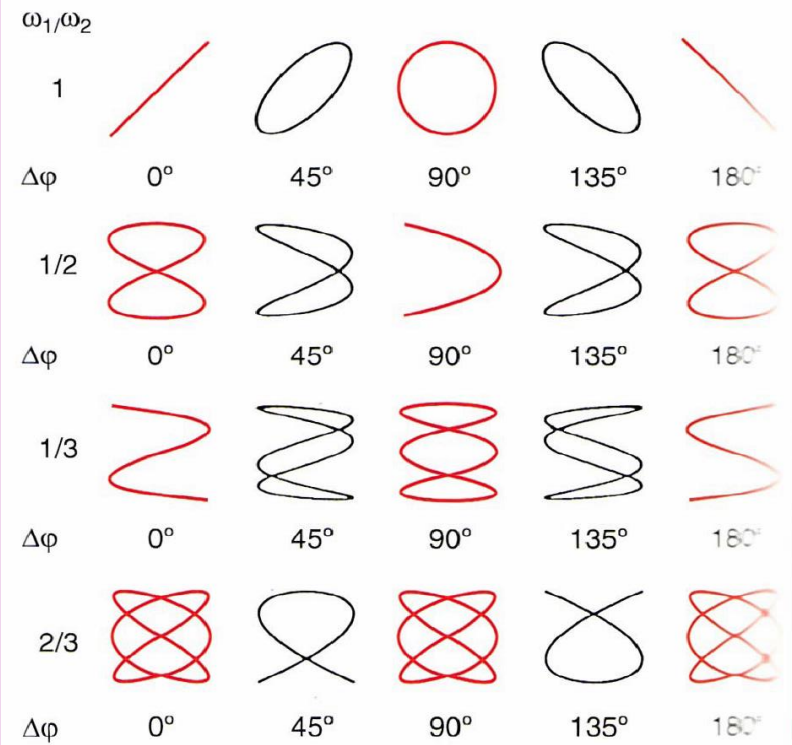


$$\begin{cases} x = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_{01}) \\ y = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_{02}) \end{cases}$$

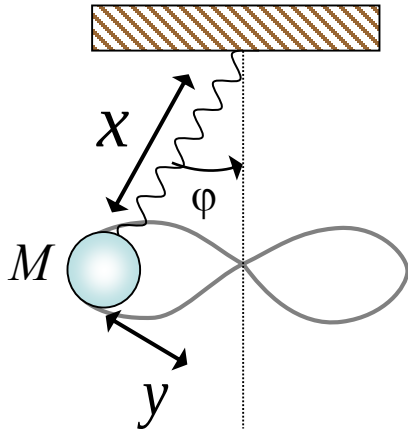
Зависимост от $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ и $\Delta\varphi$



Фигури на Лисажу



в) Събиране на трептения с еднакви честоти, във взаимно перпендикулярни направления



$$\begin{cases} x = A \sin \omega t \\ y = B \sin \omega t + \varphi_0 \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \varphi_0 = \sin^2 \varphi_0$$

$$\varphi_0 = k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\varphi_0 = 2k + 1 \pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$y = \frac{B}{A} x$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$$