Методи на Рунге-Кута

→ Методи подобряващи точността на приближението чрез ред на Тейлър, в които обаче не е необходимо пресмятането на производни от по-висок ред. Различните варианти на методите на Рунге-Кута могат да бъдат обобщени чрез формулата:

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)\,h \qquad (1)$$

т.е. нова стойност = стара стойност + наклон × стъпка

където $\phi(x_i, y_i, h)$ е наречена ф-я на нарастване

$$\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots a_n k_n$$

където a_n са константи а k_n се дават с ф-лите:

$$\begin{cases} k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \\ k_3 = f(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h) \\ \vdots \\ k_n = f(x_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \dots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h) \end{cases}$$

където p и q са константи

След избора на порядъка на метода n, коефициентите a, p и q се пресмятат приравняването на (1) към съответния ред на Тейлър.

Метод на Рунге-Кута от 2-ри порядък

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)\,h \qquad (2)$$

където

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$$

Ред на Тейлър (за получаване на коефициентите a, p, q)

(3) $$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + \frac{f'(x_i, y_i)}{2!}h^2 = y_i + f(x_i, y_i)h + \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)\frac{h^2}{2!}$$

Разлагайки $k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$ в ред на Тейлър ~~получаваме~~ и замествайки в (2):

(4) $$y_{i+1} = y_i + [a_1 f(x_i, y_i) + a_2 (f(x_i, y_i)]h + \left[a_2 p_1 \frac{\partial f}{\partial x} + a_2 q_{11} f(x_i, y_i)\frac{\partial f}{\partial y}\right]h^2 + O(\ldots$$

Сравнявайки (3) и (4) получаваме за търсените коефициенти:

т.е $$\begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ a_1 p_1 = \frac{1}{2} \\ a_2 q_{11} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \quad a_1 = 1 - a_2, \quad p_1 = q_{11} = \frac{1}{2a_2}$$

① $\Rightarrow$ Heun Method with a Single Corrector ($a_2 = \frac{1}{2}$) (Рунге-Кута от 2-ри ред

$$a_1 = \frac{1}{2}; \quad p_1 = q_{11} = 1$$

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right)h$$

където k_1 и k_2 са съответно наклоните в началото и края на интервала.

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i + h, y_i + k_1 h) \end{array} \right.$$

② The Midpoint Method ($a_2 = 1$). Ако $a_2 = 1$ то $a_1 = 0$, $p_1 = q_{11} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad y_{i+1} = y_i + k_2 h$$

където:

$$k_1 = f(x_i\ y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h;\ y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$

③ Метод на Ралстон $\left(a_2 = \frac{2}{3}\right)$

$a_2 = \frac{2}{3}$, $a_1 = \frac{1}{3}$, $p_1 = q_{11} = \frac{3}{4}$

$$\Rightarrow y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2\right)h$$

където

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{4}k_1 h\right)$$

Методи на Рунге-Кута от трети порядък

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)h$$

където:

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$

$$k_3 = f(x_i + h, y_i - k_1 h + 2k_2 h)$$

Порядък на точност: Локална грешка $O(h^4)$, гло

Метод на Рунге-Кута от четвърти порядък

Това е най-популярният метод използван в практиката
използваната форма на метода се нарича "класически Рун
метод от 4-ти ред":

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

където:

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h ; y_i + \frac{1}{2}k_2 h\right)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3 h)$$