

(6.39) $K_{1,i} = f(x_i, y_i)$ 100% recycled

$$K_{2,i} = f(x_i + c_2 h_{i+1}; \hat{y}_i + h_{i+1} a_{2,1} K_{1,i})$$

$$K_{3,i} = f(x_i + c_3 h_{i+1}; \hat{y}_i + h_{i+1} (a_{3,1} K_{1,i} + a_{3,2} K_{2,i}))$$

$$\vdots$$
$$K_{s,i} = f(x_i + c_s h_{i+1}; \hat{y}_i + h_{i+1} (a_{s,1} K_{1,i} + a_{s,2} K_{2,i} + \dots + a_{s,s-1} K_{s-1,i}))$$

където s - брой на етажите, $(K_{s,i})$ - стойности на коефициентите на схемата на Рунге-Кута, изчисления на осн. на дясната част на y -ишо (6.9); (c_j) , $j=2..s$; $(a_{l,m})$, $l=2..s$, $m=1..s-1$, b_k , $k=1..s$ и са в обгласие с (6.38)

Първия индекс в обозначенията е номерът на етажа, втория, съответства на индекса на t . x_i - началото на отрезъка $[x_i, x_{i+1}]$ на който се смята.

В някои методи освен изчисляването на приближеното значение се смята още една допълнителна стойност \tilde{y}_{i+1} по ϕ -лата:

$$\tilde{y}_{i+1} = \hat{y}_i + h_{i+1} [b_1 K_{1,i} + b_2 K_{2,i} + \dots + b_s K_{s,i}]$$

порядъка на доп. решение е с 1 по-голям (с поредно по-точно) от \hat{y} . Величината $|\hat{y}_{i+1} - \tilde{y}_{i+1}|$ служи за

пресмятане на грешките и управлението на големината на стъпката.

→ Най-голямо приложение в практиката е намерил метода на Рунге-Кута от 4-ти порядък.

$$y_{i+1} = \hat{y}_i + \frac{h_{i+1}}{6} (K_{1,i} + 2K_{2,i} + 2K_{3,i} + K_{4,i})$$

където $K_{1,1} = f(x_1, y_1)$

$$k_{2,i} = f \left(x_i + \frac{h_{i+1}}{2} ; \hat{y}_i + \frac{h_{i+1}}{2} k_{1,i} \right)$$

$$k_{3,i} = f \left(x_i + \frac{h_{i+1}}{2} ; \hat{y}_i + \frac{h_{i+1}}{2} k_{2,i} \right)$$

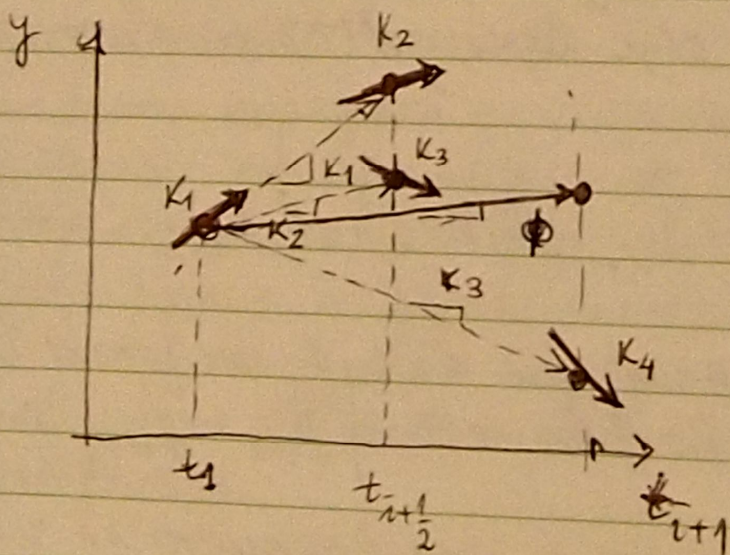
$$k_{4,i} = f \left(x_i + h_{i+1} ; \hat{y}_i + h_{i+1} k_{3,i} \right)$$

Схемата (6.41) е тетриъгълна за нея се избират следните коефициенти.

$$S=4 ; c_2=c_3=\frac{1}{2} ; c_4=1 ; a_{2,1}=\frac{1}{2} , a_{3,1}=a_{4,1}=a_{4,2}=0$$

$$a_{3,2}=\frac{1}{2} ; a_{4,3}=1$$

Геометрична интерпретация на метода на Рунге-Кутса от 4-ти порядък:



Пример. Да се реши задачата на Коши с използване на метода Рунге-Кутса от 4-ти порядък

$$y' = 4e^{0,8t} - 0,5y \quad ; \quad y(0) = 2 \quad ; \quad t = 0..1 \quad ; \quad h = 1$$

$$k_1 = f\left(\frac{0}{2}\right) = 4e^{0,8 \cdot 0} - 0,5(2) = 3$$

$$y\left(\frac{h}{2}\right) = 2 + 3 \cdot \left(\frac{h}{2}\right) = 3,5$$

$$k_2 = 4e^{0,8 \cdot (0,5)} - 0,5 \cdot (3,5) = 4,21299$$

$$y\left(\frac{h}{2}\right) = 2 + 4,217299 \cdot (0,5) = 4,108649$$

$$k_3\left(\frac{h}{2}\right) = 4e^{0,8 \cdot (0,5)} - 0,5(4,108) = 3,91297$$

$$y(h) = 2 + 3,91297 \cdot (1,0) = 5,91297$$

$$k_4(1,0) = 2 + 4,201037 \cdot (1,0) = 6,201037$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 2 + \frac{1}{6} (3 + 2 \cdot 4,108649 + 2 \cdot 3,91297 + 6,201037)$$

Числени методи за решаване на ОДУ. Интерполационен принцип.

Според дадения принцип явните или явните методи от съответният порядък се получават чрез интегриране на задачата на Коши:

$$\text{т.е. } y' = f(x, y) \quad ; \quad y(x_0) = y_0, \quad x \in (a, b)$$

$$(6.22) \quad \int_{y_i}^{y_{i+1}} dy = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx$$

Според интерп.-интерполационен принцип f -ята $f(x, y(x))$ се заменя с интерполационен многочлен от съотв. ~~с~~ степен p ($p=0$ за метод от 1-ви порядък, $p=1$ за метод от 2-ри порядък и т.н.)

За изчисляване на интеграла в дясната част могат да бъдат използвани известните квадратурни ф-ли. - на правоъгълниците, на триъгълниците, на параболите (Симпсън) и др.

① Ако използваме x_{i+1} като възел в отпулв многочлен $L_0(x) = f(x_{i+1}, \hat{y}_{i+1})$ - интегрираме

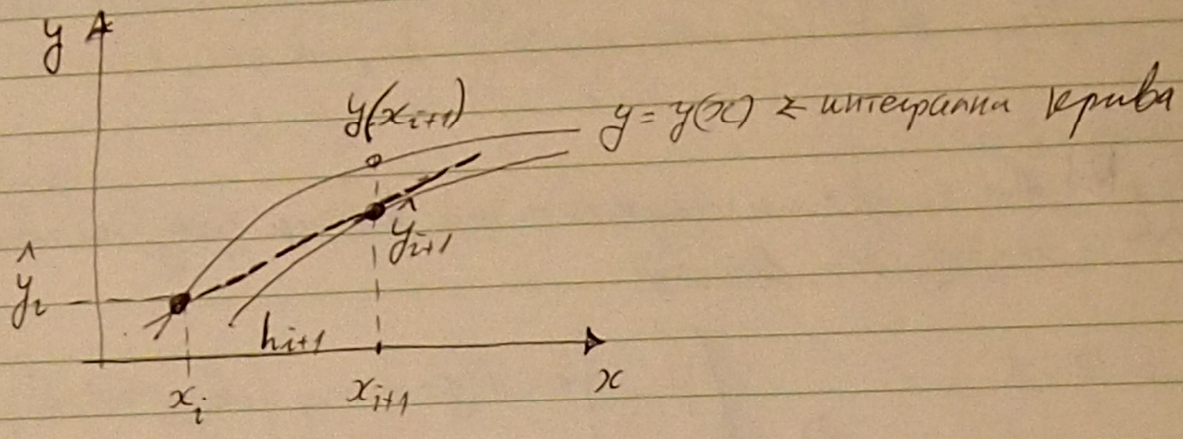
~~получаваме~~ получаваме т.нар. явен метод на Ойлер:

$$(6.23) \quad \left. \begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h_{i+1} f(x_{i+1}, \hat{y}_{i+1}) \end{aligned} \right\} + O(h^2), \quad i=0, \dots, n-1$$

или $y_{i+1} = \phi(x_i, x_{i+1}, \hat{y}_{i+1})$

(т.е. получаваме явна едностъпкова ф-ла от 1-ви порядък)

Геометрическа интерпретация на неявния метод на Ойлер



y_{i+1} лежи в ^{определена} интегрална крива (от семейството интегрални криви), такава че допирателната в т. (x_i, y_i) да пресича през т. (x_{i+1}, y_{i+1}) .

② Ако използваме интерполация многополи от 1-ви поредък -

$L_1(x)$ чрез значенията на ф-ята в т. x_i и т. x_{i+1} и използваме в (6.22) метода на трапеците получаваме:

$$(6.24) \quad \left[\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \frac{h_{i+1}}{2} \left[f_i + f(x_{i+1}, \hat{y}_{i+1}) \right] \right] = \left[O(h^2) \right]$$

$$= \Phi(x_i, x_{i+1}, \hat{y}_{i+1})$$

(неявна едноствикова ф-ла от 2-ри поредък)

Подсврътане, че свойството неявност на ф-ми (6.23 и 6.24) е породено от това че y_{i+1} се намира в ~~и~~ ~~от~~ двете страни на y -тията.

При реализацията на алгоритъм за по 6.23 и 6.24 неизвестното значение y_{i+1} се изчислява ~~от~~ по някои от методите за решаване на нелинейни y -тия (например метода на Нютон).

→ при използване на метода на Нютон y -тията се записва

$$\hat{y}_{i+1} - \Phi(x_i, x_{i+1}, \hat{y}_{i+1}) = F(\hat{y}_{i+1}) = 0$$


→ може да се използва и метода на простите итерации;

$$\hat{y}_{i+1}^{(k+1)} = \Phi(x_i, x_{i+1}, \hat{y}_{i+1}^{(k)}), \quad k=0, 1, \dots$$

Пример, №1 Да се реши задачата на Коши чрез първия метод на Ейлер:

$$\begin{cases} y' = z - 1 \\ z' = -y - 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \hat{y}_{i+1} \\ \hat{z}_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{y}_i \\ \hat{z}_i \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} \hat{z}_{i+1} - 1 \\ -\hat{y}_{i+1} - 2\hat{z}_{i+1} \end{pmatrix}$$

$$\text{нека } h=0,1; \quad \begin{matrix} \hat{y}_0 = y(0) = 1 \\ \hat{z}_0 = z(0) = -1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_{i+1} \\ \hat{z}_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{y}_i + 0,1 \hat{z}_{i+1} - 0,1 \\ \hat{z}_i - 0,1 \hat{y}_{i+1} - 0,2 \hat{z}_{i+1} \end{pmatrix}$$

(преобразувайки)
 \Rightarrow Решавайки С-та относно \hat{y}_{i+1} , \hat{z}_{i+1} получаваме

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \left(\frac{0,1(\hat{z}_i - 0,1\hat{y}_i + 0,001) - 0,1}{1,21} \right)$$

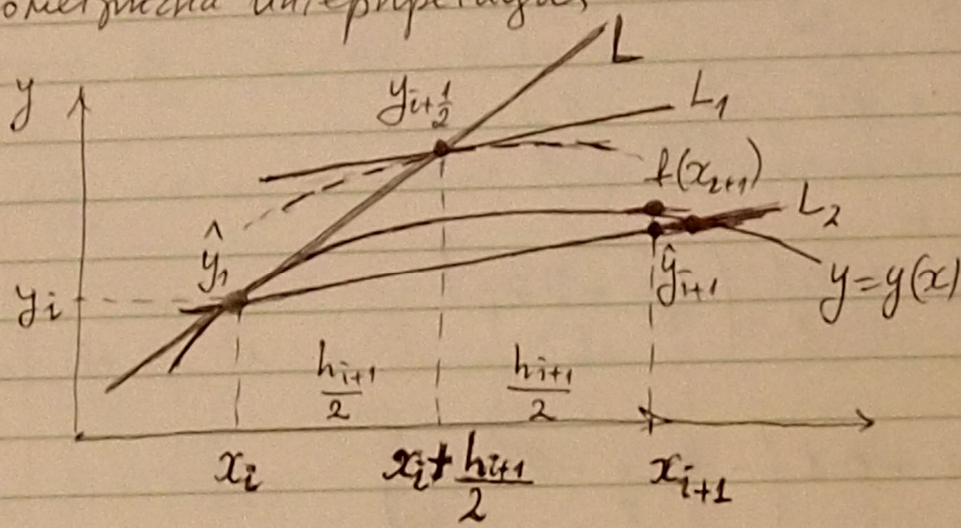
$$\hat{z}_{i+1} = \left(\frac{\hat{z}_i - 0,1\hat{y}_i + 0,01}{1,21} \right)$$

Решаване до постигане на желаната точност по метода на итерациите

③ Използването на квадратурната ф-ла σ на правоъгълниците дава модифицирания метод на Ойлер от 2-ри порядък

$$(6.28) \quad \begin{cases} \hat{y}_{i+\frac{1}{2}} = \hat{y}_i + \frac{h_{i+1}}{2} f(x_i, y_i) \\ \hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + h_{i+1} f\left(x_i + \frac{h_{i+1}}{2}, y_{i+\frac{1}{2}}\right) \end{cases} \quad i = 0, \dots, n-1$$

→ Геометрична интерпретация:



През т. (x_i, y_i) се строи допирателната L наклона на която е $y'(x_i) = f(x_i, \hat{y}_i)$. При $x = x_i + \frac{h_{i+1}}{2}$ полуглавя-

ме т. $\hat{y}_{i+\frac{1}{2}}$, построяваме новата допирателна L_1 с наклон $f(x_i + \frac{h_{i+1}}{2}, y_{i+\frac{1}{2}})$ а след това построяваме правата L_2 успоредна на L_1 и преликваща през т. (x_i, y_i) .

Така намираме т. ~~(x_i, y_i)~~ (x_{i+1}, y_{i+1})

Уравнението на правата L_2 има вида:

$$\hat{y}_{i+1} = y_i + h_{i+1} f\left(x_i + \frac{h_{i+1}}{2}, y_{i+\frac{1}{2}}\right)$$

При анализа за устойчивост на метода се ползва те интервала на устойчивост на Модиф. метод на Ойлер $h \in (-2, 0)$ и съвпада с интервала на устойчивост на обикн. метод на Ойлер



Пример: за използване на модифицирания метод на Ойлер:
 Нека да решим с-та ОДУ от пример №1 на интервала $[0, 1]$

$$\begin{cases} y' = z - 1 & ; y(0) = 1 & ; h = 0,1 \\ z' = -y - 2z & ; z(0) = -1 \end{cases}$$

По ф-лите (6.28) получаваме

$$\hat{y}_{i+\frac{1}{2}} = \hat{y}_i + \frac{0,1}{2} (\hat{z}_i - 1)$$

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + 0,1 \cdot \left(\frac{\hat{z}_{i+\frac{1}{2}}}{2} - 1 \right)$$

$$\hat{z}_{i+\frac{1}{2}} = \hat{z}_i + \frac{0,1}{2} (-\hat{y}_i - 2\hat{z}_i)$$

$$\hat{z}_{i+1} = \hat{z}_i + 0,1 \left(-\hat{y}_{i+\frac{1}{2}} - 2\hat{z}_{i+\frac{1}{2}} \right)$$

при $x_{i+0,1} \rightarrow y = 0,80992$; $z = -0,90083$

Ако използваме ~~много~~ ^{многочлен на Лагранж} от 2-ра степен и използваме ~~формулата~~ ^{формулата} на ~~Ойлер~~ ^{Ойлер} параболите за решаване на интеграла отгласно в (6.22) получаваме явна схема от 4-ти порядък, отнасяща се към групата на методите на Адамс

$$(6.29) \quad \hat{y}_{i+1} = \hat{y}_{i-1} + \frac{h}{3} \left(f_{i-1} + 4f_i + f(x_{i+1}, \hat{y}_{i+1}) \right)$$

за да получим и други схеми от групата на Адамс - можем да запишем интеграла 6.22. във вида

$$\int_{y_i}^{y_{i+1}} dy = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x) dx$$

и да заменим производната y' с интерполационен полином \hat{y}' построен на постоянна мрежа с $h = \text{const}$

Ако използваме интерполационния многоглен на Нютон

$$y'(\hat{q}) = y'_i + \hat{q} \Delta y'_{i-1} + \frac{\Delta^2 y_{i-2}}{2} \hat{q}^2 (\hat{q}^{i+1}) - \dots$$

Можем да получим обща ф-ла за семейството на Явните схеми на Адамс:

$$31) \quad \hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \eta_i + \frac{1}{2} \Delta \eta_{i-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 \eta_{i-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 \eta_{i-3} + \frac{251}{720} \Delta^4 \eta_{i-4} + \dots$$

където $\eta_i = h f(x_i, \hat{y}_i) = h f_i$, а крайните разлики

$\Delta \eta_k$ се изчисляват според следната таблица:

x_k	\hat{y}_k	η_k	$\Delta \eta_k$	$\Delta^2 \eta_k$	$\Delta^3 \eta_k$
...			
x_{i-3}	\hat{y}_{i-3}	η_{i-3}			
x_{i-2}	\hat{y}_{i-2}	η_{i-2}	$\Delta \eta_{i-3}$	$\Delta^2 \eta_{i-3}$	
x_{i-1}	\hat{y}_{i-1}	η_{i-1}	$\Delta \eta_{i-2}$	$\Delta^2 \eta_{i-2}$	$\Delta^3 \eta_{i-3}$
x_i	\hat{y}_i	η_i	$\Delta \eta_{i-1}$		

→ Ако вземем първите 2 глеца, използваме метода на Ойлер
 → Ако вземем първите 3 глеца използваме Явния метод от вида:

$$y_{i+1} = y_i + h f_i + \frac{1}{2} [h f_i - h f_{i-1}]$$

→ Ако вземем първите четири глеца, то Явния метод има вид

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= \hat{y}_i + \frac{h}{2} [3f_i - f_{i-1}] + \frac{5}{12} [(h f_i - h f_{i-1}) - (h f_{i-1} - h f_{i-2})] = \\ &= \hat{y}_i + \frac{h}{12} [23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2}] \end{aligned}$$

100% recycled
В резултат от 6.31 получихме няколко схеми на Адамс - Бешфорд

→ явна схема от втори порядък

$$(6.32) \quad \hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \frac{h}{2} [3f_i - f_{i-1}]$$

→ явна схема от трети порядък

$$(6.33) \quad \hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \frac{h}{12} [23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2}]$$

→ явна схема от четвърти порядък

$$(6.34) \quad \hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \frac{h}{24} [55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}]$$

За начало на сметките по ф-ла 6.32 ни трябва 2 "стартови" точки \hat{y}_0 и \hat{y}_1 ; по ф-ла 6.33 - три "стартови" точки y_0, y_1, y_2 ; по ф-ла 6.34 - 4 такива точки. Те трябва предварително пресметнати с точност не по-малка от порядъка на точност на схемата.

II. Ако за построяването на интерполационния многочлен използваме шаблони включващи т. x_{i+1} , то се получава следната обща ф-ла даваща семейството явни методи на Адамс:

$$(6.35) \quad \hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \eta_{i+1} - \frac{1}{2} \Delta \eta_i - \frac{1}{12} \Delta^2 \eta_{i-1} - \frac{1}{24} \Delta^3 \eta_{i-2} + \frac{19}{720} \Delta^4 \eta_{i-3} + \dots$$

$$\text{където } \eta_{i+1} = h f(x_{i+1}, \hat{y}_{i+1}) = h f_{i+1}$$

а крайните разлики $\Delta \eta$ се намират с помощта на следната таблица:

x_k	\hat{y}_k	η_k	$\Delta \eta_k$	$\Delta^2 \eta_k$	$\Delta^3 \eta_k$	$\Delta^4 \eta_k$
---	---	---				
x_{i-3}	\hat{y}_{i-3}	η_{i-3}				
x_{i-2}	\hat{y}_{i-2}	η_{i-2}	$\Delta \eta_{i-3}$			
x_{i-1}	\hat{y}_{i-1}	η_{i-1}	$\Delta \eta_{i-2}$	$\Delta^2 \eta_{i-3}$		
x_i	\hat{y}_i	η_i	$\Delta \eta_{i-1}$	$\Delta^2 \eta_{i-2}$	$\Delta^3 \eta_{i-3}$	$\Delta^4 \eta_{i-3}$
x_{i+1}	\hat{y}_{i+1}	η_{i+1}	$\Delta \eta_i$	$\Delta^2 \eta_{i-2}$	$\Delta^3 \eta_{i-2}$	

→ Ако вземем първите 2 глежи от (6.35) получаваме неясния метод на Ойлер.

→ Ако вземем три глежи - ~~не~~ неясния метод на трапеците

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + h f_{i+1} - \frac{1}{2} [h f_{i+1} - h f_i] = \hat{y}_i + \frac{h}{2} [f_i + f(x_{i+1}, \hat{y}_{i+1})]$$

→ Ако вземем 4 глежи - получаваме неясен метод от 3-ти порядък

$$\begin{aligned} \hat{y}_{i+1} &= \hat{y}_i + \frac{h}{2} (f_i - f_{i+1}) - \frac{1}{12} [(h f_{i+1} - h f_i) - (h f_i - h f_{i-1})] = \\ &= \hat{y}_i + \frac{h}{12} [-f_{i-1} + 8 f_i + 5 f(x_{i+1}, \hat{y}_{i+1})] \end{aligned}$$

! Изброеките методи - от 1, 2, и 3 порядък, както и висши методи получени от ф-ла 6.35 носят названието неясни методи на Адамс - Мултон

→ неясен метод от 4-ти порядък

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + \frac{h}{24} (f_{i-2} - 5 f_{i-1} + 19 f_i + 9 f(x_{i+1}, \hat{y}_{i+1}))$$

За да започнем пресметанията по дадените ф-ми са ни необходими съотв. фр-и "стартови" точки

Основна трудност при прилагането на неявни методи е намаляването на f_{i+1} стойност от двете страни на y -члента, което най-общо изисква решаване чрез методите за нелинейни уравнения.

Един начин да се преодолеят затрудненията е използването на т. наречените методи от типа "предсказване-корекция"

Идеята на тези методи е използването на комбинация от явна и неявна f -ла. Явната f -ла се прилага за предсказване на стойността на y_{i+1} , а неявната за нейната корекция

Нека да разгледаме примерна комбинация

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + \frac{h}{2}(3f_i - f_{i-1}) \rightarrow \text{двустъпков явен метод на Адамс-Бешфорд от 2-ри порядък}$$

$$y_{i+1}^{(1)} = y_i + \frac{h}{2}(f_{i+1}^{(0)} + f_i) \rightarrow \text{неявен метод от 2-ри порядък (трапеците) на Адамс-Мултон}$$

горния индекс (0) означава предсказана с-ст., а (1) коригирана с-ст.

\rightarrow възможно е използването на неявната f -ла с итерации в етапа на корекция.

$$y_{i+1}^{(r+1)} = y_i + \frac{h}{2}(f_{i+1}^{(r)} + f_i)$$